# Grundlagen der Elektrotechnik I
# Duale Hochschule Karlsruhe
**Dozent: Prof. Dr.-Ing. Gerald Oberschmidt**

## Inhaltsverzeichnis

**1 Einheiten** **4**
1.1 Basis-Einheiten . . . . . 4
1.2 Zehnerpotenzen . . . . . 5

**2 Strom, Leitung, Potenzial** **7**
2.1 Stromdichte . . . . . 7
2.2 Strömungsgeschwindigkeit . . . . . 7
2.3 Energie, Potenzial und Ladung . . . . . 7
2.4 Stromkreis mit Potenzialen . . . . . 8
2.5 Fernmeldekabel . . . . . 8
2.6 Temperaturabhängiger Widerstand . . . . . 9

**3 Widerstand** **10**
3.1 Spannungs- und Stromquellen . . . . . 10
3.2 Pfeile, Maschen und Zweige . . . . . 11
3.3 Serien und Paralleschaltung/ Brückenschaltung . . . . . 12
3.4 Einschalten einer Glühlampe . . . . . 15
3.5 Genauigkeit eines Thermometers . . . . . 16
3.6 Temperaturabhängigkeit eines Widerstandes . . . . . 16
3.7 Temperaturabhängigkeit in Messinstrumenten . . . . . 17
3.8 Erwärmung einer Leitung . . . . . 17
3.9 Zuleitung . . . . . 18
3.10 Spannungsquelle . . . . . 18

**4 Standardschaltungen mit Widerständen** **20**
4.1 Serienschaltung von zwei Widerständen . . . . . 20
4.2 Parallelschaltung von zwei Widerständen . . . . . 21
4.3 Serienschaltung von drei Widerständen . . . . . 22
4.4 Parallelschaltung von drei Widerständen . . . . . 23
4.5 Parallel- und Serienschaltung von drei Widerständen . . . . . 24
4.6 Parallel- und Serienschaltung von drei Widerständen, zweite Variante . . . . . 26
4.7 Praktische Anwendung: Belasteter Spannungs- und Stromteiler . . . . . 28
4.8 Parallelschaltung von $N$-Widerständen . . . . . 29
4.9 Serienschaltung von $N$-Widerständen . . . . . 31
4.10 Verkettung von $N$-Serien-Parallelschaltungen: $R - 2R$-Netzwerk . . . . . 33
4.11 Verkettung von $N$-Serien-Parallelschaltungen: Allgemeiner Fall . . . . . 34

**5 Berechnung von Gleichstromkreisen 1** **38**
5.1 Spannungs- und Stromteiler . . . . . 38
5.2 Schrittweise Vereinfachung . . . . . 38
5.3 Berechnung mit Stern-Dreiecksumwandlung . . . . . 38
5.4 Brücke . . . . . 39
5.5 Strom in der Brücke . . . . . 41
5.6 Ersatzspannungsquelle . . . . . 42
5.7 Aufteilung . . . . . 44
5.8 Stern und Dreieck . . . . . 44

**6 Maschenstrom- und Überlagerungsverfahren** **46**
6.1 Überlagerungsverfahren oder Maschenstromanalyse . . . . . 46
6.2 Überlagerungsverfahren . . . . . 49
6.3 Maschenstromanalyse . . . . . 49
6.4 Maschenstromanalyse . . . . . 50
6.5 Maschenstromanalyse . . . . . 52
6.6 Kirchhoff'sche Regeln (13 Punkte) . . . . . 54
6.7 Maschen, Überlagerung oder Dreieck und Stern? (16 Punkte) . . . . . 58

**7 Knotenpotenzialverfahren** **62**
7.1 Knotenpotenzialverfahren . . . . . 62
7.2 Knotenpotenzialverfahren . . . . . 63
7.3 Vergleich der Verfahren . . . . . 63
7.4 Kirchhoff'sche Regeln (14 Punkte) . . . . . 65

**8 Zweipoltheorie** **68**
8.1 Einfacher Zweipol . . . . . 68
8.2 Zweipol . . . . . 68
8.3 Leistungsmaximierung . . . . . 69
8.4 Zweipol und Leistung . . . . . 70
8.5 Grafische Darstellung . . . . . 71
8.6 Zweigstromanalyse . . . . . 72
8.7 Zweipoltheorie . . . . . 74
8.8 Zweipoltheorie . . . . . 75
8.9 Ersatzspannungsquelle (14 Punkte) . . . . . 76
8.10 Ersatzspannungsquelle (14 Punkte) . . . . . 78

**9 Berechnung von Kreisen mit nichtlinearen Elementen und gesteuerten Quellen** **82**
9.1 Leuchtdiode . . . . . 82
9.2 Spannungsgesteuerte Quelle . . . . . 83
9.3 Differentieller (Kleinsignal) Widerstand . . . . . 84
9.4 Überspannungssicherung . . . . . 85
9.5 Einfache Transistorschaltung . . . . . 87

**10 Kapazitäten im eingeschwungenen (DC) Zustand** **90**
10.1 Ladung . . . 90
10.2 Widerstände und Kapazitäten . . . 91
10.3 Schalten zwischen Kapazitäten . . . 91
10.4 Netzwerk aus Kapazitäten . . . 92

**11 Start und Langzeitbedingungen** **94**
11.1 RLC in Serie . . . 94
11.2 LC parallel geschaltet . . . 94
11.3 Netzwerk aus Kapazitäten und Widerständen . . . 95
11.4 Parallele Spulen . . . 97
11.5 Serielle Spulen . . . 98
11.6 Netzwerk von Induktivitäten . . . 99

**12 Schaltvorgänge** **102**
12.1 Entladung einer Kapazität . . . 102
12.2 Isolierter Kondensator . . . 103
12.3 Ein Relais . . . 103
12.4 Umschalten einer Kapazität . . . 104
12.5 Umschalten am Kondensator . . . 106
12.6 Umschalten an der Spule . . . 106
12.7 Kondensator an verschiedenen Quellen . . . 106
12.8 Spule an verschiedenen Quellen . . . 108
12.9 Ladevorgänge, 7 Punkte . . . 110
12.10 Ladevorgänge, 10 Punkte . . . 112
12.11 Ladevorgänge, 14 Punkte . . . 113

# Formelsammlung

## Gleichstromtechnik

| | |
|---|---|
| Strom | $I$ in A |
| Stromdichte | $J = S = \frac{I}{A}$ in $\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$ |
| Ladung | $Q = It$ in As=C |
| Widerstand | $R = \frac{U}{I}$ in $\Omega = \frac{\text{V}}{\text{A}}$ |
| Leitwert | $G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U}$ in $\text{S} = \frac{1}{\Omega} = \frac{\text{V}}{\text{A}}$ |
| Spez. Widerstand | $\rho$ in $\Omega$m |
| Leitfähigkeit | $\kappa = \frac{1}{\rho}$ in $\frac{\text{S}}{\text{m}}$ |
| $R$ aus Geometrie und Temp. | $R = \rho\frac{\ell}{A}$, $R = R_0(1 + \alpha(T - T_0) + \beta(T - T_0)^2 \ldots)$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Reihenschaltung von $R$ | $R_{ges} = \sum\limits_{i=1}^{N} R_i$ | Parallelschaltung von $R$ | $\frac{1}{R_{ges}} = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}$ |
| Parallelschaltung | von zwei $R$ | $R_{ges} = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$ | |
| Spannungsteiler (2 $R$) | $U_1 = U_{ges}\frac{R_1}{R_1+R_2}$ | Stromteiler (2 $R$) | $I_1 = I_{ges}\frac{R_2}{R_1+R_2}$ |
| Stern-Dreiecks-Umwandlung | $R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}$ | $R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2}$ | $R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}$ |
| Dreieck-Stern-Umwandlung | $R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$ | $R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$ | $R_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$ |
| Maschenregel | $\sum\limits_{i=1}^{N} U_i = 0$ | Knotenregel | $\sum\limits_{i=1}^{N} I_i = 0$ |
| Quellen | Leerlauf $U_{LL}$ | Kurzschluss $I_{KS}$ | Innen-$R$ $R_I = \frac{U_{LL}}{I_{KS}}$ |
| Kapazität | $C = \frac{Q}{U}$ in $\text{F} = \frac{\text{As}}{\text{V}}$ | $i = C\frac{du}{dt}$ | Spannung stetig |
| Energie in $C$ | $W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ | Entladung | $u_C = U_{C0}e^{-t/(RC)}$ |
| Ladung | $u_C = (U_Q - U_{C0})\left(1 - e^{-t/(RC)}\right) + U_{C0}$ | | |
| Start-$C$ | $R_{0+} = 0$ | Langzeit $C$ | $R_\infty = \infty$ |
| Induktivität | $L = \frac{\Phi}{I}$ in $\text{H} = \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$ | $u = L\frac{di}{dt}$ | Strom stetig |
| Energie in $L$ | $W = \frac{1}{2}LI^2$ | Entladung | $i_L = I_{L0}e^{-tR/L}$ |
| Ladung | $i_L = (\frac{U_Q}{R} - I_{L0})\left(1 - e^{-tR/L}\right) + I_{L0}$ | | |
| Start-$L$ | $R_{0+} = \infty$ | Langzeit $L$ | $R_\infty = 0$ |

**Knotenpotenzialverfahren**

(a) Ideale Spannungsquellen wandelbar machen oder alle einen gemeinsamen Knoten = Masseknoten

(b) Quellen in Stromquellen wandeln

(c) Knoten durchnummerieren, 0 = Masseknoten = Knoten idealer SpgQ

(d) Leitwertmatrix: Hauptdiag. $\sum G$ am Knoten, Nebendiag. $-G$ Verbindung der Knoten

(e) Rechte Seite: $\sum I_Q$ in den Knoten positiv

(f) Zeilen mit idealen SpgQ streichen, Spalten auf rechte Seite

(g) GLS lösen

(h) Ggf. gesuchte Spannungen und Ströme berechnen

**Maschenstromverfahren**

(a) Vollständigen Baum konstruieren, Ströme auf Verbindungszweigen sind Maschenströme, Maschen über Baum schließen, Ideale Stromquellen auf Verbindungszweig legen.

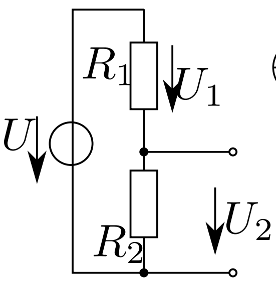
(b) StrQ in SpgQ wandeln

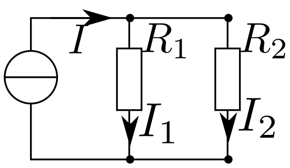
(c) Hauptdiag. $\sum R$ in Masche, Nebendiag. $R$ mit Kopplung der Maschen, positiv, wenn M.-Ströme gleichsinning

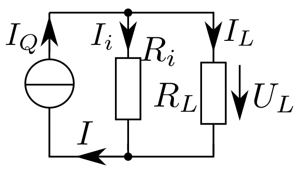
(d) Rechte Seite: $\sum U_Q$ in Masche positiv gegen M-Strom

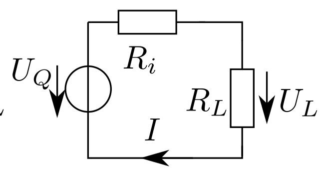
(e) GLS lösen

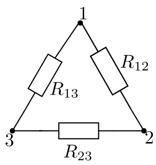
(f) Ggf. gesuchte Spannungen und Ströme berechnen

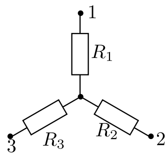


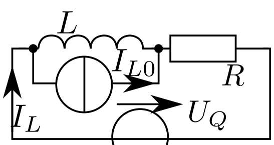



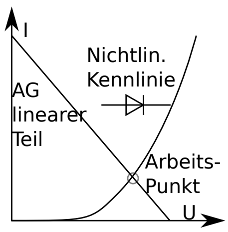



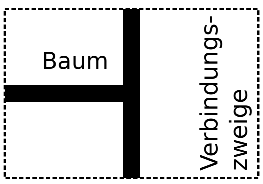



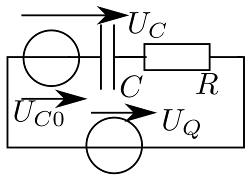




Bemerkung.
Formelsammlung, wachsende Version, bei fehlenden Formeln bitte Bescheid sagen, dann werden sie auch im Hinblick auf die Klausur übernommen

# 1 Einheiten

## 1.1 Basis-Einheiten

Ziel der Aufgaben ist die Rechnung mit SI-Einheiten zu üben.
Geben Sie für die folgenden Größen gebräuchliche kohärente Einheiten und die Dimension an, rechnen Sie die kohärenten Einheiten in die Basiseinheiten des SI-Systems um:

(a) Geschwindigkeit
**Lösung:** $dim(v) = \frac{L}{T}$ bzw. $[v] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

(b) Kinetische Energie einer Masse, bekanntlich dem Zusammenhang Arbeit=0,5 × Masse × Geschwindigkeit zum Quadrat ($W = \frac{1}{2}mv^2$).
**Lösung:** $dim(W) = M dim(v)^2 = ML^2/T^2$ bzw. $[W] = \mathrm{kgm^2/s^2}$

(c) Druck(=Kraft pro Fläche)
**Lösung:** $dim(P) = \frac{ML}{L^2T^2} = \frac{M}{LT^2}$ bzw. $[p] = \mathrm{Pa} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}} = \frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s^2m^2}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{ms^2}}$

(d) Ladung in einer Autobatterie 75 Amperé-Stunden (A· h).
**Lösung:** $75\,\mathrm{Ah} = 270\,\mathrm{kAs}$

(e) Temperaturspanne in der Rheinschiene von -15 °C bis +40°C.
**Lösung:** $55\,\mathrm{K}$

(f) Anzugsmoment einer Radmutter an einem Chevrolet von 885,1 lb-in [mit 1 lb= 453,592 370 g (Amerikanisches Pfund) und 1 in=2,54 cm (inch)].
**Lösung:** $885{,}1\,\mathrm{lb-in} = 885{,}1 \times 0{,}453\,592\,\mathrm{kg} \times 0{,}0254\,\mathrm{m} \times 9{,}8062\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} = 100\,\mathrm{Nm} = 100\,\frac{\mathrm{kgm^2}}{\mathrm{s^2}}$

(g) Welchen Reifendruck in psi (pound per square inch $\frac{\mathrm{lb}}{\mathrm{in^2}}$) muss man in USA einstellen, wenn man 2 bar im Reifen haben möchte?
**Lösung:**

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{bar} &= 0{,}2\,\mathrm{MPa} = 0{,}2\,M\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}} = 2\cdot 10^5\,\mathrm{Pa} = 2\cdot 10^5\,\mathrm{N/m^2} \\ &= 2\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{m^2s^2}} = 2\cdot 10^5 \times \frac{\frac{\mathrm{lb}}{0{,}453592\,\mathrm{kg}}}{\left(\frac{\mathrm{in}}{0{,}0254\,\mathrm{m}}\right)^2}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^2}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \\ &= 29{,}008\,\mathrm{psi} \times 9{,}8062\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \end{aligned}$$

(h) Welche durchschnittliche Geschwindigkeit hatte Usain Bolt am 16.8.2009 in Berlin bei seinem 100 m Lauf in 9,58 s? Geben Sie (Ausnahmsweise) auch die Geschwindigkeit in km/h an und nennen Sie Ihre Top-Speed auf dem Fahrrad!
**Lösung:** $v = 10{,}438\,\mathrm{m/s} = 37{,}578\,\mathrm{km/h}$

(i) Im letzten Jahr habe ich 1340 $\mathrm{m^3}$ Gas verheizt. Dieses hatte einen Brennwert von 11,2 $\mathrm{kWh/m^3}$. Wie groß war mein Energieverbrauch, und wie hoch wäre meine Stromrechnung bei einem Preis von 20 Cent/kWh zusätzlich gewesen, hätt ich mit Strom geheizt?
**Lösung:** $W_{ges} = 15\,008\,\mathrm{kWh} = 54{,}03\,\mathrm{GJ}$; Hätte gekostet: 3001,6 EUR

(j) Drehmoment eines PKW Motors (Bugatti Veyron) von 1001 PS bei 6000 U/min! Wobei zu beachten ist, dass 1 PS die Leistung ist, die (von einem Pferd) erbracht wird, wenn ein Gewicht von 75 kg in einer Sekunde um einen Meter (gegen die Erdanziehungskraft von $g = 9{,}80665\,\mathrm{m/s^2}$) gehoben wird. Wie schnell wäre eine Kutsche mit 1001 Pferden, und wie lang?
**Lösung:** Leistung $P_{Veyron} = 1001\,\mathrm{PS} \times 75\,\mathrm{kg} \times 9{,}80665\,\mathrm{m/s^2} = 0{,}736\,234\,\mathrm{MW} = 0{,}736\,234 \times 10^6\,\frac{\mathrm{kgm^2}}{\mathrm{s^3}}$
Drehmoment, $\omega$ ist die Winkelgeschwindigteit
$M = P_{Veyron}/\omega = 0{,}736\,234 \times 10^6\,\frac{\mathrm{kgm^2}}{\mathrm{s^3}} / \frac{100 \times 2\pi}{\mathrm{s}} = 1171\,\frac{\mathrm{kgm^2}}{\mathrm{s^2}} = 1171\,\mathrm{Nm}$

## 1.2 Zehnerpotenzen

Ziel der Aufgaben ist es, einen sicheren Umgang mit Zehnerpotenzen in wissenschaftlicher Notation und mit Vorsatz der Potenz vor der Einheit zu erlangen.
Geben Sie folgende Werte zum Einen in einer bequemen wissenschaftlichen Notation (also mit Zehnerpotenzen) und zum Anderen in einer Schreibweise mit Vorsatz für die Zehnerpotenz an! Verwenden Sie nur kohärente Einheiten aus dem SI-System, gerne auch abgeleitete.

(a) $A = 10\mathrm{nm} \times 4\mu\mathrm{m}$
**Lösung:** $A = 4 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}^2 = 40000 \cdot 10^{-2 \cdot 9}\,\mathrm{m}^2 = 40000\,\mathrm{nm}^2$

(b) $V = (10\mathrm{mm})^3$

(c) $v = 299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

(d) $f = 9\,192\,631\,770\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

(e) Folgende Entfernungen

i. Die Größe der Milchstraße ca. 100 000 Lichtjahre (ein Jahr hat $365\frac{1}{4}$ Tage); Entfernung Erde - Sonne $150 \cdot 10^6$ km; Erde zum Mond 384 400 km;

ii. Erdumfang und -radius; Entfernungen Karlsruhe - Sydney; Karlsruhe - Stuttgart; Duale Hochschule zum Schloss; zu Ihrem Nachbarn;

iii. Gitterkonstante von Ga As mit $a = 5{,}6\,\AA$ mit einem Angström $1\AA = 10^{-10}$ m; Atomradius von Wasserstoff (30 pm).

(f) Folgende wichtige physikalische Größen

i. Elementarladung von $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$;

ii. Elektronengewicht $m_e = 9{,}109 \cdot 10^{-31}\,kg$;

iii. Protonengewicht $m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

iv. Masse der Erde $m_E = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$

(g) Ladung in allen PKW-Batterien (Jahr 2010) zusammen, das waren 41 737 600 PKW, wir nehmen eine Batterie mit 75 Ah an.

(h) Maximale Dauerleistung aller Deutschen Kernkraftwerke beträgt (21 507 MW), die abgegebene Energiemenge (134 932 GWh) und der Brennstoffverbrauch (1 474,0 PJ). Berechnen Sie daraus noch

i. Wie lange die KKW - im Durchschnitt - bei Ihrer maximal möglichen Dauerleistung betrieben wurden, Deutschland hat 17 Reaktoren in Betrieb!
**Lösung:** Betriebsdauer: $t = W_{ab}/P/N = 134932\,\text{GWh}/(21507\,\text{MW}) = 6273{,}9\,\text{h} = 261\,\text{Tage}$

ii. Wieviel Brennstoff pro abgegebener Energie eingesetzt werden musste (Wirkungsgrad)!
**Lösung:** $\eta = W_{ab}/W_{in} = 32{,}95\,\%$

(i) Druck einer elektrotechnischen Prüfnadel, die mit 2 N auf eine Fläche von $10\,\mu\text{m} \times 10\,\mu\text{m}$ drückt.

(j) Die Kraft der Definition des Amperé, die pro einem Meter zwischen zwei unendlich langen Leitern wirkt, wenn diese Leiter von einem Amperé durchflossen werden und einen Abstand von einem Meter zueinander haben.

(k) Berechnen Sie $l = 1\,\text{km}+23\,\text{cm}+70\,\text{mm}+12\,\text{pm}$!

(l) Im Hausanschluss zum Elektroherd in der Küche fließen 10 A. Gleichzeitig nutzt ein weiterer Hausbewohner Power-Line-Communication, um im Internet zu surfen, hierfür fließt ein Strom von $141\,\mu\text{A}$ durch die gleiche Leitung. Wie groß ist das Verhältnis von Signalstrom (für das Internet) zum Gesamtstrom auf der Leitung.

# 2 Strom, Leitung, Potenzial

## 2.1 Stromdichte

In einer Leitung mit kreisförmigem Querschnitt $A$ fließt ein Strom $I$.

(a) Welche Kantenlänge $a$ müsste ein Leiter mit quadratischem Querschnitt haben?
**Lösung:** natürlich $a = \sqrt{A}$

(b) Um wieviel Prozent müssen Durchmesser der o.g. kreisförmigen Leiters, bzw. Kantenlänge des Quadratischen geändert werden, wenn der Strom um 3 % ansteigt, die Stromdichte aber konstant bleiben soll?
**Lösung:** Es muss immer gelten $D'/D = a'/a = \sqrt{1{,}03} \approx 1{,}015$. Durchmesser und Kantenlänge müssen sich also um ca. 1,5 % vergrößern

(c) Welchen Leiter würden Sie bevorzugen und warum?
**Lösung:** Hängt von den Anforderungen der Konstruktion ab, der runde Leiter hat den Vorteil der leichteren Verarbeitbarkeit als Kabel, während der quadratische die größere Oberfläche besitzt, wodurch Wärme besser abgeführt wird und er ggf. außerdem besser zu verschrauben ist.

## 2.2 Strömungsgeschwindigkeit

In einem Kupferdraht von $A = 2{,}5\,\mathrm{mm}^2$ fließt ein Strom von $I = 16\,\mathrm{A}$.

(a) Wie groß ist die Strömungsgeschwindigkeit der freien Ladungsträger, wobei die Dichte $n = 8{,}5 \times 10^{19}\,\mathrm{mm}^{-3}$ beträgt?
**Lösung:** Es gilt $I = Q/T = neAv$ und damit $v = I/(neA) \approx 0{,}47\,\mathrm{mm/s}$

(b) In einem Halbleiter sind deutlich weniger Elektronen vorhanden, in Ge z.B. nur $n = 2.4 \times 10^{10}\,\mathrm{mm}^{-3}$. Sollte ich den gleichen Strom durch den gleichen Querschnitt treiben können, wie groß wäre die Geschwindigkeit der Elektronen?
**Lösung:** Mit der gleichen Rechnung kommt man auf $v = 1{,}667 \times 10^6\,\mathrm{m/s}$. Ob diese Geschwindigkeit tatsächlich erreicht werden kann, ist hiermit nicht gesagt!

## 2.3 Energie, Potenzial und Ladung

Eine Batterie wird in einer Zeit von 2h bei einer Potenzialdifferenz von 12V mit einem Strom von 3A geladen.

(a) Welche elektrische Energie wird dem Stromkreis entzogen?
**Lösung:** Die Energie von 72 Wh

(b) Welche Ladungsmenge wird durch den Verbraucher bewegt?
**Lösung:** Die Ladungsmenge von $q = 6\,\mathrm{Ah} = 21\,600\,\mathrm{As}$

(c) Über einen Verbraucher wird die Batterie nun wieder entladen und zwar in 4 Tagen. Welcher Strom fließt durch den Verbraucher? Die Systeme seien ideal verlustlos.
**Lösung:** Kann man natürlich über die Ladung machen oder einfach über den Dreisatz: In 2h geladen, in 4 Tagen=96 Stunden entladen, heißt dass der Entladestrom nur der 48ste Teil des Ladestromes ist, also fließen $3/48\,\mathrm{A} = 1/16\,\mathrm{A} = 62{,}5\,\mathrm{mA}$.

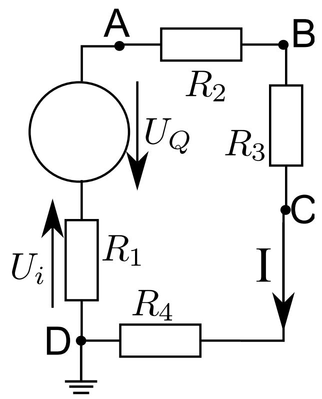
(d) Bei dem Verbraucher handelt es sich um ein elektrisches Thermometer, das nur ca. einmal pro 5 Minuten abgefragt wird, aber kontinuierlich die Temperatur misst. Was könnte man tun, um die Lebensdauer der Batterie deutlich zu erhöhen? Geben Sie Ihre Abschätzung einer Größenordnung für die Lebensdauerverlängerung an!
**Lösung:** Einfach nur zur Abfrage einschalten lassen und danch sofort wieder schlafen schicken. Die Lebensdauer würde sich bis in die Jahre hinein verlängern lassen.

## 2.4 Stromkreis mit Potenzialen

Bei dem skizzierten Stromkreis beträgt der Spannungsabfall aufgrund des inneren Widerstandes der Spannungsquelle $U_i = 10V$.
Die elektrischen Potenziale der Punkte A bis D haben folgende Werte:
$\Phi_A = 200\,\mathrm{V}$, $\Phi_B = 150\,\mathrm{V}$, $\Phi_C = 120\,\mathrm{V}$, $\Phi_D = 0\,\mathrm{V}$

(a) Berechnen Sie die Quellenspannung $U_Q$!
**Lösung:** Quellenspannung beträgt $U_Q = 210\,\mathrm{V}$.

(b) Wie groß sind die Spannungen $U_{AD}$, $U_{AB}$, $U_{AC}$?
**Lösung:** Die einzelnen Spannungen betragen $U_{AD} = 200\,\mathrm{V}$, $U_{AB} = 50\,\mathrm{V}$, $U_{AC} = 80\,\mathrm{V}$.




## 2.5 Fernmeldekabel

Ein Fernmeldekabel aus Kupfer mit der Bezeichnung AWG22 (American Wire Gauge) hat einen Durchmesser von 0,644mm. Es ist auf der "letzten Meile" zu Ihrem Haus verlegt. Kupfer hat einen spezifischen Widerstand von $\rho = 0{,}0176\mu\Omega\mathrm{m}$.

(a) Welchen Widerstand erfährt das DSL-Signal auf einer Strecke von 1 km? Bedenken Sie, dass der Strom auch zurück muss!
**Lösung:** Die Fläche des Kabels (Querschnitt) ist $A = 0{,}326\,\mathrm{mm}^2$, damit ist der Widerstand $R = 2 \times 1\,\mathrm{km} \times \rho/A \approx 108\,\Omega$

(b) Üblicherweise ist die Leitung in Ihrem Haus mit $120\,\Omega$ abgeschlossen, d.h. zwischen den beiden Enden der Leitung wird so ein Widerstand angebracht. Geben Sie eine vereinfachte Ersatzschaltung des Kabels mit dem Abschluss an!

(c) Bezeichnen Sie Potenziale, wenn am Eingang des Kabels eine Spannungsquelle mit $U = 60\,\mathrm{V}$ angeschlossen wird.

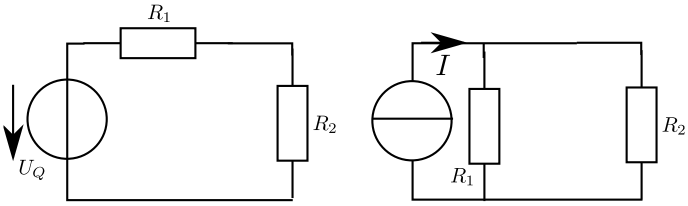
## 2.6 Temperaturabhängiger Widerstand

Ein temperaturabhängiger ohmscher Widerstand $R$ hat bei 10°C einen Widerstand von $6\,\Omega$. Wie groß ist der Widerstand bei 20°C und bei 80°C, wenn der Temperaturkoeffizient bei Kupfer bei $\theta = 20°\mathrm{C}$ genau $\alpha = 3{,}92 \times 10^{-3}\,\frac{1}{°\mathrm{C}}$ beträgt?
**Lösung:** Die Widerstände betragen $R(20°\mathrm{C}) = 6{,}245\,\Omega$, $R(80°\mathrm{C}) = 7{,}714\,\Omega$

# 3 Widerstand

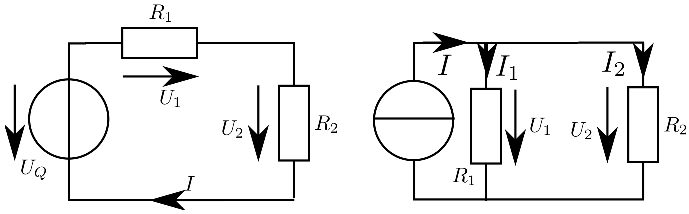
## 3.1 Spannungs- und Stromquellen

Betrachten Sie die gezeigten einfachen Schaltbilder einer realen Spannungs- und einer realen Stromquelle:




Spannungsquelle (links) und Stromquelle (rechts) mit Innen- und Last-Widerstand.

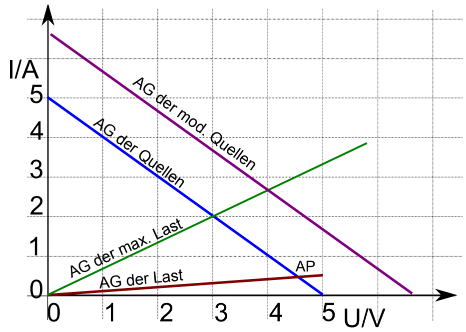
(a) Bezeichnen Sie mit sinnvoll gerichteten Pfeilen alle auftretenden Spannungen und Ströme!
**Lösung:**




Spannungsquelle (links) und Stromquelle (rechts) mit Innen und Last-Widerstand inklusive der Pfeile für relevante Größen.

(b) In der Spannungsquelle seien $U_Q = 5\,\mathrm{V}$, $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 10\,\Omega$.

i. Zeichnen Sie die Arbeitsgeraden der Spannungsquelle!
**Lösung:**




Arbeitsgeraden der Quellen und der Last.

ii. Bestimmen Sie $I$ und $R_{1,I}$ sowie $R_{2,I}$ der äquivalenten Stromquelle! Zeichnen Sie auch hier die Arbeitsgeraden (in dasselbe Diagramm).
**Lösung:** Kurzschlussstrom der Spannungsquelle ist $I_K = U_Q/R_1 = 5\,\mathrm{V}/1\,\Omega = 5\,\mathrm{A} = I$ und der Innenwiderstand der Stromquelle muss so bemessen sein, dass bei Leerlauf (der Stromquelle) die gleiche Spannung an ihm abfällt, also $U_Q = I_K \times R_{1,I} \Leftrightarrow R_{1,I} = \frac{U_Q}{U_Q/R_1} = R_1 = 1\,\Omega$. $R_2$ bleibt natürlich vollkommen unberührt.

iii. Geben Sie den Arbeitspunkt an, also Strom und Spannung, die sich an der Last einstellen!
**Lösung:** Abgelesen in etwa 4,5V und 0,5A für Spannung und Strom am Arbeitspunkt. Genaue Berechnung ist: $I_2 = \frac{U_Q}{R_1+R_2} = \frac{5}{11}\,\mathrm{A} = 0{,}\overline{45}\,\mathrm{A}$ und die Spannung ist entsprechend $U_2 = I_1 \times R_2 = \frac{50}{11}\,\mathrm{V} = 4{,}\overline{54}\,\mathrm{V}$

(c) Welcher Widerstand $R_2$ darf minimal angeschlossen werden, wenn die Spannung an ihm nicht unter 3 V sinken darf?
**Lösung:** Grafische Lösung siehe oben: Bei 3 V fließen demnach 2 A, der Widerstand $R_{2.min} = 1{,}5\,\Omega$.

Oder rechnerisch $U_{2,min} = 3\,\mathrm{V} = \frac{U_Q R_{2,min}}{R_1+R_{2,min}} \Leftrightarrow R_{2,min} = \frac{U_{2,min}}{U_Q - U_{2,min}} R_1 = 1{,}5\,\Omega$

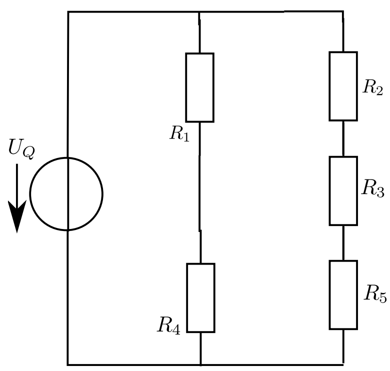
(d) Wie hoch muss der Kurzschlussstrom der Stromquelle (oder natürlich auch der Spannungsquelle) sein, wenn bei dem unter (c) berechneten Widerstand an demselben noch eine Spannung von 4,0 V abfallen soll (Der Innenwiderstand wird nicht verändert!)?
**Lösung:** Grafisch ist dieses eine Parallelverschiebung der Arbeitsgerade der Quelle. Macht man das, so kann man ablesen, dass $I_K \approx 6{,}7\,\mathrm{A}$, $U_0 \approx 6{,}7\,\mathrm{V}$ sein muss.

Rechnerisch geht es ähnlich: Es muss gelten $I_2 = U/R_{2,min} = 4\,\mathrm{V}/1{,}5\,\Omega = \frac{8}{3}\,\mathrm{A}$ und damit bei gleichem Spannungsabfall über dem Innenwiderstand der Stromquelle $I_1 = 4\,\mathrm{A}$ Der Kurzschlussstrom der Quelle ist somit $I_K = I_1 + I_2 = \left(\frac{8}{3} + 4\right)\,\mathrm{A} = 6\frac{2}{3}\,\mathrm{A} = 6{,}\overline{6}\,\mathrm{A}$. Leerlaufspannung der Quelle entsprechend $U_Q = 6\frac{2}{3}\,\mathrm{V}$.

(e) Ihnen steht eine Spannungsquelle mit einer Leerlaufspannung von 100 V zur Verfügung. Was müssten Sie tun um diese Quelle als Stromquelle für Ströme von 10 mA +/-1% für Lasten von 1 bis 100 Ω zu nutzen?
**Lösung:** Damit 10 mA bei Kurzschluss fließen muss der Innenwiderstand der Spannungsquelle $R_1 = 10\,\mathrm{k}\Omega$ betragen. Bei einer Last von 100 Ω fließen dann $I_2 = \frac{U_q}{R_1+R_2} = \frac{100\,\mathrm{V}}{10\,100\,\Omega} \approx 9{,}901\,\mathrm{mA}$, also etwas weniger als 1% weniger als gefordert. Optimiert kann man natürlich auch den Innenwiderstand zu 9950 Ω wählen, dann wird der Toleranzbereich besser ausgenutzt.

## 3.2 Pfeile, Maschen und Zweige

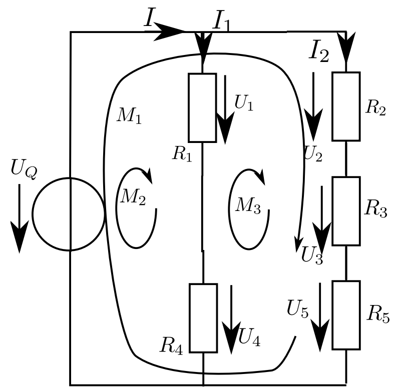
Betrachten Sie den gezeigten generischen Gleichstromkreis!




Zu Berechnender Gleichstromkreis

Folgende Werte sind gegeben: $U_Q = 100\,\mathrm{V}$, $R_1 = 1000\,\Omega$, $R_2 = 100\,\Omega$, $R_3 = 300\,\Omega$, $R_4 = 3000\,\Omega$, $R_5 = 600\,\Omega$

(a) Bezeichnen Sie sämtliche (unterschiedlichen) Ströme und Spannungen!
**Lösung:**




(b) Berechnen Sie die oben bezeichneten Ströme und Spannungen!
**Lösung:** $U_1 = 25\,\mathrm{V}$, $U_4 = 75\,\mathrm{V}$, $I_1 = 25\,\mathrm{mA}$
$U_2 = 10\,\mathrm{V}$, $U_3 = 30\,\mathrm{V}$, $U_5 = 60\,\mathrm{V}$, $I_2 = 100\,\mathrm{mA}$
$I = 125\,\mathrm{mA}$

(c) Bezeichnen Sie die unterschiedlichen Zweige und Maschen! Wieviele Zweige und wieviele Maschen gibt es?
**Lösung:** Siehe Zeichnung oben, es gibt genau zwei Knoten, 3 Zweige hat und es gibt drei Maschen.

(d) Stellen Sie die Maschengleichungen auf, sowohl als Formeln als auch mit Zahlenwerten!
**Lösung:**

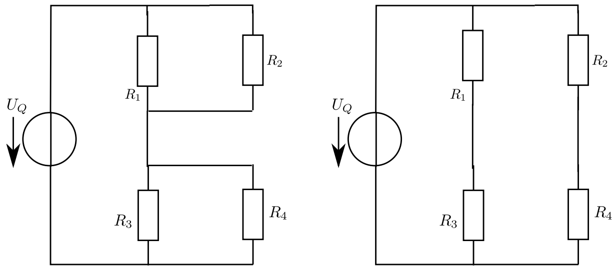
$$
\begin{aligned}
M_1 &: U_Q = U_2 + U_3 + U_5 \Rightarrow 100\,\mathrm{V} = 10\,\mathrm{V} + 30\,\mathrm{V} + 60\,\mathrm{V} \\
M_2 &: U_Q = U_1 + U_4 \Rightarrow 100\,\mathrm{V} = 25\,\mathrm{V} + 75\,\mathrm{V} \\
M_3 &: U_1 + U_4 = U_2 + U_3 + U_5 \Rightarrow 25\,\mathrm{V} + 75\,\mathrm{V} = 10\,\mathrm{V} + 30\,\mathrm{V} + 60\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

(e) Stellen Sie die Knotengleichungen auf!
**Lösung:**

$$
\begin{aligned}
K_1 &: I = I_1 + I_2 \Rightarrow 125\,\mathrm{mA} = 100\,\mathrm{mA} + 25\,\mathrm{mA} \\
K_2 &: I_1 + I_2 = I \Rightarrow 100\,\mathrm{mA} + 25\,\mathrm{mA} = 125\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

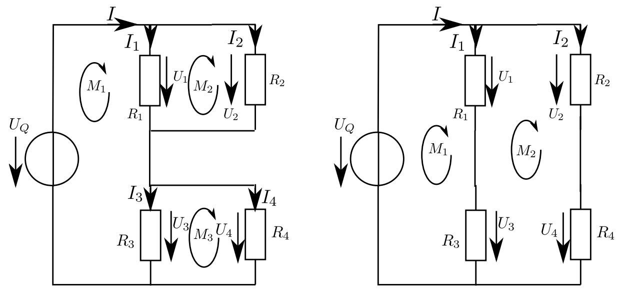
## 3.3 Serien und Paralleschaltung/ Brückenschaltung

Zwei Schaltungen gemäß Schaltbild sind gegeben:




Parallelschaltung (links) und Serienschaltung von Widerständen

(a) Bezeichnen Sie alle Ströme und Spannungen sowie identifizieren Sie unabhängige Maschen in beiden Schaltungen!
**Lösung:**




Parallelschaltung (links) und Serienschaltung von Widerständen

(b) Geben Sie die Maschen und Knotengleichungen an!
**Lösung:**

i. Für die Parallelschaltung gilt:

$$M_1: \; U_Q = U_1 + U_3 = U_2 + U_4, \quad M_2: \; U_1 = U_2, \quad M3: \; U_3 = U_4$$

$$K_1: \; I = I_1 + I_2, \quad K_2: \; I = I_3 + I_4, \quad K_3: \; I_1 + I_2 = I_3 + I_4$$

ii. Für die Serienschaltung gilt:

$$M_1: \; U_Q = U_1 + U_3, \quad M2: \; U_1 + U_3 = U_2 + U_4 \quad K_1: \; I = I_1 + I_2$$

(c) Geben Sie sämtliche Ströme und Spannungen in beiden Schaltungen an, der Gesamtwiderstand darf z.B. mit $R_{ges}$ abgekürzt werden!
**Lösung:**

i. Parallelschaltung (links): Für den Gesamtwiderstand, den die Spannungsquelle sieht ergibt sich:

$$\begin{aligned} R_{ges} &= \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + \frac{R_3R_4}{R_3+R_4} = \frac{R_1R_2(R_3+R_4)+R_3R_4(R_1+R_2)}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)} \\ &= \frac{R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4}{R_1R_3 + R_2R_3 + R_1R_4 + R_2R_4} \end{aligned}$$

Und mit dieser Abkürzung ist dann

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{U_Q}{R_{ges}} \times \frac{R_2}{R_1 + R_2}, & I_2 &= \frac{U_Q}{R_{ges}} \times \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \\
U_1 = U_2 &= \frac{U_Q}{R_{ges}} \times \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} & = U_Q &\frac{R_1 R_2 (R_3 + R_4)}{R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2)} \\
I_3 &= \frac{U_Q}{R_{ges}} \times \frac{R_4}{R_3 + R_4}, & I_4 &= \frac{U_Q}{R_{ges}} \times \frac{R_3}{R_3 + R_4}, \\
U_3 = U_4 &= \frac{U_Q}{R_{ges}} \times \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} & = U_Q &\frac{R_3 R_4 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2)} \\
I &= \frac{U_Q}{R_{ges}}
\end{aligned}$$

ii. Etwas einfacher in der Serienschaltung: Wiederum der Gesamtwiderstand aus Sicht der Quelle

$$R_{ges} = (R_1 + R_3)||(R_2 + R_4) = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

Und mit dieser Abkürzung ist dann

$$\begin{aligned}
U_1 &= U_Q \frac{R_1}{R_1 + R_3}, & U_2 &= U_Q \frac{R_2}{R_2 + R_4}, \\
U_3 &= U_Q \frac{R_3}{R_1 + R_3}, & U_4 &= U_Q \frac{R_4}{R_2 + R_4}, \\
I_1 &= \frac{U_Q}{R_1 + R_3}, & I_2 &= \frac{U_Q}{R_2 + R_4} \\
I &= \frac{U_Q}{R_{ges}}
\end{aligned}$$

(d) Unter welchen Umständen sind die Spannungen und Ströme über bzw. durch den jeweils gleich bezeichneten Widerständen in beiden Schaltbildern gleich?
**Lösung:** Man schaue sich nur die einzelnen Schaltungen (immer noch separat) an und übertrage Forderungen der einen auf die andere. So muss nun einfach überall gelten:

$$U_1 = U_2,\ U_3 = U_4,\ I_1 = I_3,\ I_2 = I_4$$

bzw. elektrisch heißt das, dass in der Parallelschaltung $R_2$ und $R_4$ miteinander verbunden werden dürfen, ohne dass etwas passiert, bzw. dass in einer Leitung in der Serienschaltung zwischen den Punkten zwischen $R_1$ und $R_3$ und entsprechend $R_2$ und $R_4$ kein Strom fließen würde.

Betrachtet man nun nur die Serienschaltung und nutzt obige Gleichungen aus, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
U_1 = U_2 &\quad \Leftrightarrow \quad \frac{R_1}{R_1 + R_3} = \frac{R_2}{R_2 + R_4} \\
U_3 = U_4 &\quad \Leftrightarrow \quad \frac{R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R_4}{R_2 + R_4}
\end{aligned}$$

Dividiert man diese beiden Gleichungen durcheinander so kürzen sich jeweils die Widerstandssummen der Nenner weg und es ergibt sich

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}.$$

Was nun auch noch beliebig umgeformt werden kann. Dieses ist die Abgleichbedingung für eine Wheatstone'sche Brückenschaltung.

## 3.4 Einschalten einer Glühlampe

Der Einschaltvorgang einer Glühlampe bei 230 V mit einer Leistungsaufnahme von 100 W soll betrachtet werden. Folgende Werte für den spezifischen Widerstand liegen vor (Quelle: WHS Sondermetalle, abgerufen am 15.1.2011 unter http://www.whs-sondermetalle.de). Die Betriebstemperatur sei 2000°C.

| Temperatur in °C | $\rho$ in $\mu\Omega$m |
|---|---|
| 20 | 0,055 |
| 1000 | 0,326 |
| 1500 | 0,486 |
| 2000 | 0,671 |

(a) Nehmen Sie an, dass die Glühlampe mit Gleichstrom betrieben wird (was natürlich normalerweise nicht passiert). Welcher Strom fließt durch die Wendel der Lampe?
**Lösung:** Der Strom ist gegeben durch die Leistung $I = P/U = 100\,\mathrm{W}/230\,\mathrm{V} = 435\,\mathrm{mA}$

(b) Welchen Widerstand hat die Wendel der Lampe im Betrieb?
**Lösung:** Das ergibt sich nun aus dem Ohmschen Gesetz mit $R = U/I = 230\,\mathrm{V}/0{,}435\,\mathrm{A} = 529\,\Omega$

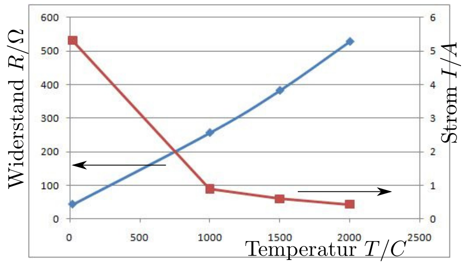
(c) Der Durchmesser der Wendel sei $40\,\mu$m. Wie groß muss die Länge sein, um bei Betriebstemperatur den unter (b) berechneten Widerstand zu haben?
**Lösung:**

| Temperatur in °C | Temp. in K | $\rho$ in $\mu\Omega$m | $\rho/\rho_{2000°C}$ | $R$ in $\Omega$ | Strom in A |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 293,15 | 0,055 | 0,0819 | 43,4 | 5,31 |
| 1000 | 1293,15 | 0,326 | 0,486 | 257 | 0,895 |
| 1500 | 1793,15 | 0,486 | 0,724 | 383 | 0,600 |
| 2000 | 2273,15 | 0,671 | 1,0 | 529 | 0,435 |

Querschnitt des Drahtes ist $A = \pi(d/2)^2 = \pi(20\,\mu\mathrm{m})^2 = 1{,}256 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}^2 = 0{,}001256\,\mathrm{mm}^2$
Für den Widerstand gilt $R = \rho\frac{l}{A} \Leftrightarrow l = \frac{R}{\rho}A = \frac{529\,\Omega}{0{,}671\times10^{-6}\,\Omega\mathrm{m}}1{,}256 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}^2 = 0{,}99\,\mathrm{m}$.
Die Wendel muss also 99 cm lang sein.

(d) Berechnen Sie nun die Widerstände bei den in der Aufgabenstellung angegebenen Temperaturen!
**Lösung:** Siehe Lösung zu (c). Weg war zunächst die spezifischen Widerstände auf den spezifischen Widerstand bei Betrieb zu normieren und dann die Widerstände entsprechend zu skalieren.

(e) Zeichnen Sie den Widerstand und den Strom über der Temperatur in ein (bzw. zwei) Diagramme!
**Lösung:** Folgendes Diagramm:




(f) Welche Energie wird verbraucht, wenn während des Einschaltvorganges jede der drei unteren Temperaturstufen in jeweils 5 ms durchfahren wird?
**Lösung:** Zwischenrechnung (dient nur zur Plausibilisierung der Größenordnungen) : Gewicht der Wolframwendel ist $m = V \times d = A \times l \times d$ wobei $d = 19{,}3\,\mathrm{g/cm^3}$ die Dichte ist. Masse ist also: $m = 1{,}24 \times 10^{-9}\,\mathrm{m^3} 19{,}3\,\mathrm{g/cm^3} = 24\,\mathrm{mg}$. Die spezifische Wärmekapazität beträgt $w = 0{,}13\,\mathrm{J/(gK)} = 130\,\mathrm{J/(kgK)}$. Um die Wendel auf 2000°C zu erwärmen werden also ca. $W_{\Delta T} = mw\Delta T$ und damit dann $W_{1980} = 24 \times 10^{-6}\,\mathrm{kg} \times 1980\,\mathrm{K} \times 130\,\mathrm{J/(kgK)} = 7{,}03\,\mathrm{J}$ benötigt.

- Bei 20°C $W_{20°C} = UI_{20°C}t = 230\,\mathrm{V} \times 5{,}31\,\mathrm{A} \times 5\,\mathrm{ms} = 6{,}1\,\mathrm{J}$
- Bei 1000°C $W_{1000°C} = UI_{1000°C}t = 230\,\mathrm{V} \times 0{,}895\,\mathrm{A} \times 5\,\mathrm{ms} = 1{,}03\,\mathrm{J}$
- Bei 1500°C $W_{1500°C} = UI_{1500°C}t = 230\,\mathrm{V} \times 0{,}6\,\mathrm{A} \times 5\,\mathrm{ms} = 0{,}69\,\mathrm{J}$
- In der Summe werden also 7,82 J verbraucht. Während des Betriebs kommt die 100 W Lampe damit 78,2 ms aus.

## 3.5 Genauigkeit eines Thermometers

Ein Platindraht wird als Thermometer verwendet. Er ist so geformt, dass er bei 0°C einen Widerstand von 100 Ω aufweist (PT100). Die Temperaturkoeffizienten sind $\alpha = 3{,}850 \times 10^{-3}\,°\mathrm{C}^{-1}$ und $\beta = -5{,}775 \times 10^{-7}\,°\mathrm{C}^{-2}$.

(a) Berechnen Sie, in welchem Temperaturbereich dieser Widerstand mit linearer Näherung verwendet werden kann, wenn die Genauigkeitsanforderungen $\pm 1\,°\mathrm{C}$ beträgt!
**Lösung:** Der Widerstand verhält sich wie: $R = R_0(1 + \alpha T + \beta T^2)$. Pro °C ändert sich also der Widerstand durch den linearen Koeffizienten um $\alpha$. Eine Fehlmessung tritt dann auf, wenn $\beta T^2$, also der zusätzliche Anteil gerade $\alpha$ ist, also $\beta T^2 = -\alpha \times 1\,°\mathrm{C}$ und damit $T = \pm\sqrt{\frac{-\alpha \times 1\,°\mathrm{C}}{\beta}} = \pm 81{,}6\,°\mathrm{C}$

## 3.6 Temperaturabhängigkeit eines Widerstandes

Der ohmsche Widerstand einer Spule aus Kupfer und einer Spule aus Manganin darf sich infolge von Erwärmung nur um 0,1 % erhöhen. Berechnen Sie die Temperaturen $\theta_{Cumax}$ und $\theta_{Mmax}$,

welche die Spulen annehmen dürfen. Die Bezugstemperatur ist $\theta_0 = 20°\text{C}$. Die Temperaturkoeffizienten des Widerstandes sind $\alpha_{Cu} = 0{,}004\,\frac{1}{\text{K}}$, $\alpha_M = 0{,}00001\,\frac{1}{\text{K}}$.
**Lösung:** Die maximalen Temperaturen ergeben sich aus $tol = \alpha(\theta_1 - \theta_0) \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_0 + tol/\alpha$ also dann $\theta_{Cumax} = 20{,}25\,°\text{C}$, $\theta_{Mmax} = 120\,°\text{C}$.

### 3.7 Temperaturabhängigkeit in Messinstrumenten

Die Temperaturabhängigkeit metallischer Leiter kann bei Messinstrumenten zu Anzeigefehlern führen. Bei Feinmessgeräten wird deshalb vor dem Drehspulwiderstand aus Kupfer $R_{Cu}$ ein Vorwiderstand aus Manganin $R_M$ geschaltet, der einen viel kleineren Temperaturkoeffizienten hat: $\alpha_{M20} = 10^{-5}\,\frac{1}{\text{K}}$, $\alpha_{Cu20} = 3{,}92 \times 10^{-3}\,\frac{1}{\text{K}}$.

(a) Um wie viel Prozent erhöht sich der Drehspulwiderstand $R_{Cu}$, wenn sich die Umgebungstemperatur von 20°C auf 30°C erhöht?
**Lösung:** Erhöht sich um 3,92 %.

(b) Leiten Sie allgemein den Temperaturkoeffizienten $\alpha$ für den Gesamtwiderstand der Reihenschaltung $R = R_{Cu} + R_M$ her, wenn die Bezugsgrößen $R_{Cu20}$, $R_{M20}$, $\alpha_{Cu20}$, $\alpha_{M20}$ gegeben sind.
**Lösung:** Es folgt

$$\begin{aligned}
R_1 &= R_0\,(1 + \alpha(\theta_1 - \theta_0)) = R_{Cu} + R_M \\
&\Rightarrow R_{Cu20}\,(1 + \alpha_{Cu}(\theta - \theta_0)) + R_{M20}\,(1 + \alpha_M(\theta - \theta_0)) \\
&= R_{Cu20} + R_{M20} + (R_{Cu20}\alpha_{Cu} + R_{M20}\alpha_M)(\theta - \theta_0) \Rightarrow \\
\alpha &= \frac{R_{Cu20}\alpha_{Cu} + R_{M20}\alpha_M}{R_{Cu20} + R_{M20}}
\end{aligned}$$

(c) Berechnen Sie den Temperaturkoeffizienten $\alpha$ für $R_{Cu20} = 20\,\Omega$ und $R_{M20} = 80\,\Omega$!
**Lösung:** Einsetzen in o.g. Gleichung ergibt $\alpha = 792\,\frac{\text{ppm}}{\text{K}}$

(d) Um wie viel Prozent erhöht sich der Gesamtwiderstand $R$, wenn sich die Umgebungstemperatur von 20°C auf 30°C erhöht?
**Lösung:** Das sind dann bei 10 K Temperatursteigerung 0,792 %

### 3.8 Erwärmung einer Leitung

(Optional, erfordert Kenntnisse über Wärmeenergie) In einem Kupferdraht mit $A = 1\,\text{mm}^2$ Querschnitt fließt für die Dauer von $t = 1\,\text{s}$ der Strom $I = 50\,\text{A}$. Die Leitfähigkeit des Materials beträgt $\kappa = 57 \times 10^6\,\frac{1}{\Omega\text{m}}$, seine spezifische Wärme ist $c = 390\,\frac{\text{J}}{\text{kg}\,\text{K}}$ und die Dichte ist $\rho = 8{,}9 \times 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Um wie viel Grad erhöht sich die Temperatur des Kupferdrahtes?
**Lösung:** Ein Abschnitt der Länge $l$ des Drahtes hat folgende Eigenschaften:

- Gewicht: $m = \rho A l = 8{,}9 \times 10^{-3} l\text{kg/m}$
- Widerstand: $R = l/(A\kappa) = 0{,}0175 l\Omega/\text{m}$
- Spannungsabfall: $U = RI = 0{,}877 l\,\text{V/m}$
- Energieumsatz: $W = UIt = 43{,}9\,\text{J/m}l$

- Temperaturerhöhung folgt dann aus $W_Q = cm\theta = W \Leftrightarrow \theta = W/(cm) = 12{,}64\,\mathrm{K}$

Allgemein ergibt sich

$$W = RI^2t = \frac{l}{A\kappa}I^2t = cm\theta = c\rho Al\theta$$
$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\frac{l}{A\kappa}I^2t}{c\rho Al} = \frac{I^2t}{\kappa c\rho A^2}$$

## 3.9 Zuleitung

Längs einer 200 m langen zweiadrigen Kupferleitung als Verbindung zwischen Generator und Verbraucher soll der maximale Spannungsabfall 9 V betragen. Der spezifische Widerstand von Kupfer beträgt $\rho = 0{,}0175\,\mu\Omega\mathrm{m}$

(a) Welche Stromdichte herrscht dann in der Leitung?
**Lösung:** Insgesamt ist die gesamte Länge von $l = 400\,\mathrm{m}$ zu betrachten. Der Gesamtwiderstand der Leitung ist also $R = \rho l/A$ und der Spannungsabfall ist dann $U = RI = \rho lI/A \Leftrightarrow J = I/A = U/(\rho l) = 1{,}28\,\mathrm{A/mm^2}$

(b) Welcher Leistungsverlust $P$ tritt auf der Leitung auf, wenn man den Drahtdurchmesser 1 mm wählt und die Leitung exakt an der oben beschrieben Grenze betreibt?
**Lösung:** Bei 1 mm Durchmesser ist die Querschnittsfläche $A = 0{,}785\,\mathrm{mm^2}$ und damit fließt ein Strom von $I = 1{,}005\,\mathrm{A}$ und der Abfall ist $U = 9\,\mathrm{V}$. Damit ist der Leistungsverlust $P = UI = 9\,\mathrm{W}$.

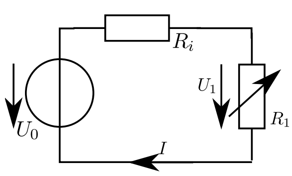
(c) Wie müsste man den Drahtdurchmesser ändern, wenn bei gleichem Strom die Verlustleistung nur halb so groß wie unter (b) sein soll?
**Lösung:** Wenn die Verlustleistung sich halbieren soll, so muss sich auch der Widerstand halbieren. Widerstand halbieren heißt Querschnitt verdoppeln und damit eben den Durchmesser um den Faktor $\sqrt{2}$ erhöhen.

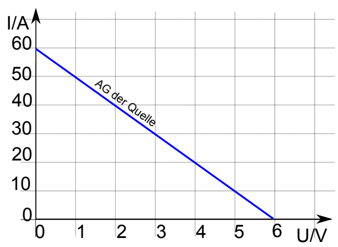
## 3.10 Spannungsquelle

Entnimmt man einer realen Spannungsquelle den Strom $I_1 = 10\,\mathrm{A}$, so sinkt ihre Klemmenspannung gegenüber dem unbelasteten Zustand von $U_0 = 6\,\mathrm{V}$ auf $U_1 = 5\,\mathrm{V}$.

(a) Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild der oben beschriebenen Anordnung!

(b) Wie groß ist die Spannung $U$ in Abhängigkeit vom entnommenen Strom $I$, wenn der Innenwiderstand der Spannungsquelle als konstant angenommen werden kann?
**Lösung:** Der Innenwiderstand ist offensichtlich $R_i = 1/10\,\Omega$ Die Lösung folgt im Bild:



Die Arbeitsgerade ist

$$U = 6\,\mathrm{V} - \frac{1}{10}\,\Omega I$$

(c) Welche Leistung wird unter der oben beschriebenen Bedingung (also $I = 10\,\mathrm{A}$) in dem Lastwiderstand $R_1$ umgesetzt? Wie groß ist $R_1$?
**Lösung:** Die Leistung ist natürlich $P = UI = 5 \times 10\,\mathrm{W} = 50\,\mathrm{W}$, der Widerstand ist $R = U/I = 0{,}5\,\Omega$.

(d) Durch Zuschalten weiterer Lasten ändert sich der Lastwiderstand und zwar so, dass er bei Nominalspannung ($U_{nom} = 5\,\mathrm{V}$) eine Leistung von $P = 200\,\mathrm{W}$ umsetzen würde. Wie groß ist der Widerstand nun und welche Leistung wird wirklich bei Betrieb mit unserer Spannungsquelle umgesetzt?
**Lösung:** Der Widerstand unter Nominalbedingungen ist $R = U^2/P = 25/200\,\mathrm{W} = 0{,}125\,\Omega$. Wird dieser Widerstand nun an die Spannungsquelle angeschlossen so durchfließt ihn ein Strom von $I = U_0/(R_i + R_1) = 6\,\mathrm{V}/((0{,}1 + 0{,}125)\,\Omega) = 26\frac{2}{3}\,\mathrm{A}$. Und damit ist die umgesetzte Leistung $P = I^2 \times R = 711\frac{1}{9} \times \frac{1}{8}\,\mathrm{W} = 88\frac{8}{9}\,\mathrm{W}$. Das ist natürlich ein Drama, denn die Quelle kann bei weitem nicht genug Leistung bereit stellen.

# 4 Standardschaltungen mit Widerständen

## 4.1 Serienschaltung von zwei Widerständen

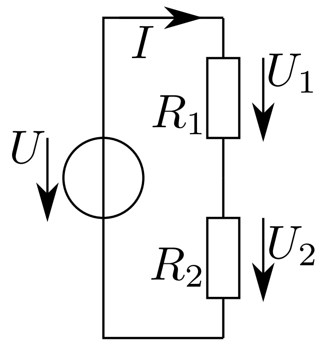



Abbildung 1: Serienschaltung von zwei Widerständen

(a) Die Widerstände betragen $R_1 = 1000\,\Omega$ $R_2 = 2000\,\Omega$ und es wird eine Spannung von $U = 10V$ angelegt. Bestimmen Sie Strom und Spannungen!
**Lösung:** Die allgemeine Rechnung ist weiter unten gezeigt, hier das Ergebnis des Spannungsteilers:

$$\begin{aligned} R &= R_1 + R_2 = 3{,}0000\,\mathrm{k\Omega} \\ I &= \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + R_2} = 3{,}3333\,\mathrm{mA} \\ U_1 &= U\frac{R_1}{R_1 + R_2} = 3{,}3333\,\mathrm{V} \\ U_2 &= U\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 6{,}6667\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

(b) Die Widerstände betragen $R_1 = 90\,\Omega$ $R_2 = 10\,\Omega$ und es wird eine Spannung von $U = 10V$ angelegt. Bestimmen Sie Strom und Spannungen!
**Lösung:** Die allgemeine Rechnung ist weiter unten gezeigt, hier das Ergebnis des Spannungsteilers:

$$\begin{aligned} R &= R_1 + R_2 = 100\,\Omega \\ I &= \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + R_2} = 100\,\mathrm{mA} \\ U_1 &= U\frac{R_1}{R_1 + R_2} = 9\,\mathrm{V} \\ U_2 &= U\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 1\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie die Spannungen und den Strom sowie den Gesamtwiderstand allgemein!

**Lösung:** Das ist natürlich ein einfacher Spannungsteiler mit, so dass sich ergibt

$$
\begin{aligned}
R &= R_1 + R_2 \\
I &= \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + R_2} \\
U_1 &= U\frac{R_1}{R_1 + R_2} \\
U_2 &= U\frac{R_2}{R_1 + R_2}
\end{aligned}
$$

## 4.2 Parallelschaltung von zwei Widerständen

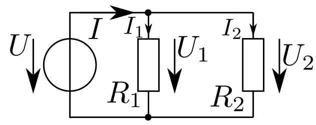



Abbildung 2: Parallelschaltung von zwei Widerständen

(a) Die Widerstände betragen $R_1 = 1000\,\Omega$ $R_2 = 2000\,\Omega$ und es wird eine Spannung von $U = 10V$ angelegt. Bestimmen Sie Strom und Spannungen!
**Lösung:** Die allgemeine Rechnung ist weiter unten gezeigt, hier das Ergebnis des Stromteilers:

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 666{,}67\,\Omega \\
I &= \frac{U}{R} = U\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 15\,\mathrm{mA} \\
U_1 &= U_2 = U = 10\,\mathrm{V} \\
I_1 &= \frac{U}{R_1} = 10\,\mathrm{mA} \\
I_2 &= \frac{U}{R_2} = 5\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

(b) Die Widerstände betragen $R_1 = 90\,\Omega$ $R_2 = 10\,\Omega$ und es wird eine Spannung von $U = 10V$ angelegt. Bestimmen Sie Strom und Spannungen!
**Lösung:** Die allgemeine Rechnung ist weiter unten gezeigt, hier das Ergebnis des Strom-

teilers:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 9\,\Omega$$
$$I = \frac{U}{R} = U\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1{,}1111\,\mathrm{A}$$
$$U_1 = U_2 = U = 10\,\mathrm{V}$$
$$I_1 = \frac{U}{R_1} = 111{,}11\,\mathrm{mA}$$
$$I_2 = \frac{U}{R_2} = 1\,\mathrm{A}$$

(c) Bestimmen Sie die Spannungen und den Strom sowie den Gesamtwiderstand allgemein!
**Lösung:** Das ist natürlich ein einfacher Stromteiler mit, so dass sich ergibt

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$
$$I = \frac{U}{R} = U\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$
$$U_1 = U_2 = U$$
$$I_1 = \frac{U}{R_1}$$
$$I_2 = \frac{U}{R_2}$$

## 4.3 Serienschaltung von drei Widerständen

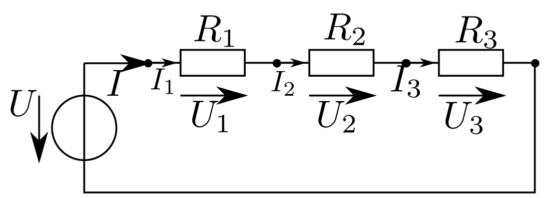



Abbildung 3: Serienschaltung von drei Widerständen

(a) Die Widerstände betragen $R_1 = 1000\,\Omega$, $R_2 = 2000\,\Omega$ $R_3 = 3000\,\Omega$ und es wird eine Spannung von $U = 10V$ angelegt. Bestimmen Sie Strom und Spannungen!
**Lösung:** Die allgemeine Rechnung ist weiter unten gezeigt, hier das Ergebnis des Spannungsteilers:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = 6{,}0000\,\mathrm{k}\Omega$$
$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} = 1{,}6667\,\mathrm{mA}$$
$$U_1 = IR_1 = 1{,}6667\,\mathrm{V}$$
$$U_2 = IR_2 = 3{,}3333\,\mathrm{V}$$
$$U_3 = IR_3 = 5\,\mathrm{V}$$

(b) Die Widerstände betragen $R_1 = 90\,\Omega$, $R_2 = 9\,\Omega$ $R_3 = 1\,\Omega$ und es wird eine Spannung von $U = 10V$ angelegt. Bestimmen Sie Strom und Spannungen!
**Lösung:** Die allgemeine Rechnung ist weiter unten gezeigt, hier das Ergebnis des Spannungsteilers:

$$\begin{aligned}
R &= R_1 + R_2 + R_3 = 100\,\Omega \\
I &= \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} = 100\,\mathrm{mA} \\
U_1 &= IR_1 = 9\,\mathrm{V} \\
U_2 &= IR_2 = 900\,\mathrm{mV} \\
U_3 &= IR_3 = 100\,\mathrm{mV}
\end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie die Spannungen und den Strom sowie den Gesamtwiderstand allgemein!
**Lösung:** Das ist natürlich ein einfacher Spannungsteiler mit, so dass sich ergibt

$$\begin{aligned}
R &= R_1 + R_2 + R_3 \\
I &= \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} \\
U_1 &= U\frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \\
U_2 &= U\frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\
U_3 &= U\frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3}
\end{aligned}$$

### 4.4 Parallelschaltung von drei Widerständen

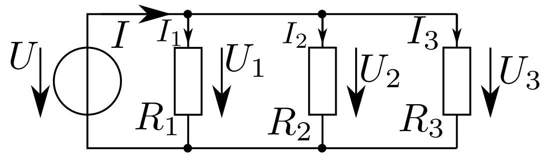



Abbildung 4: Parallelschaltung von drei Widerständen

(a) Die Widerstände betragen $R_1 = 1000\,\Omega$, $R_2 = 2000\,\Omega$ $R_3 = 3000\,\Omega$ und es wird eine Spannung von $U = 10V$ angelegt. Bestimmen Sie Strom und Spannungen!

**Lösung:** Die allgemeine Rechnung ist weiter unten gezeigt, hier das Ergebnis:

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} = 545{,}45\,\Omega \\
I &= \frac{U}{R} = 18{,}333\,\mathrm{mA} \\
I_1 &= \frac{U}{R_1} = 10\,\mathrm{mA} \\
I_2 &= \frac{U}{R_2} = 5\,\mathrm{mA} \\
I_3 &= \frac{U}{R_3} = 3{,}3333\,\mathrm{mA}
\end{aligned}$$

(b) Die Widerstände betragen $R_1 = 11{,}111\,\Omega$, $R_2 = 111{,}11\,\Omega$ $R_3 = 1{,}0000\,\mathrm{k\Omega}$ und es wird eine Spannung von $U = 10V$ angelegt. Bestimmen Sie Strom und Spannungen!
**Lösung:** Die allgemeine Rechnung ist weiter unten gezeigt, hier das Ergebnis:

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} = 10\,\Omega \\
I &= \frac{U}{R} = 1\,\mathrm{A} \\
I_1 &= \frac{U}{R_1} = 900\,\mathrm{mA} \\
I_2 &= \frac{U}{R_2} = 90\,\mathrm{mA} \\
I_3 &= \frac{U}{R_3} = 10\,\mathrm{mA}
\end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie die Spannungen und den Strom sowie den Gesamtwiderstand allgemein!
**Lösung:** Hier nun die allgemeine Rechnung:

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3} \\
I &= \frac{U}{R} = U\frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_1R_2R_3} \\
I_1 &= \frac{U}{R_1} \\
I_2 &= \frac{U}{R_2} \\
I_3 &= \frac{U}{R_3}
\end{aligned}$$

### 4.5 Parallel- und Serienschaltung von drei Widerständen

(a) Die Widerstände betragen $R_1 = 1000\,\Omega$, $R_2 = 2000\,\Omega$ $R_3 = 3000\,\Omega$ und es wird eine Spannung von $U = 10V$ angelegt. Bestimmen Sie Strom und Spannungen!

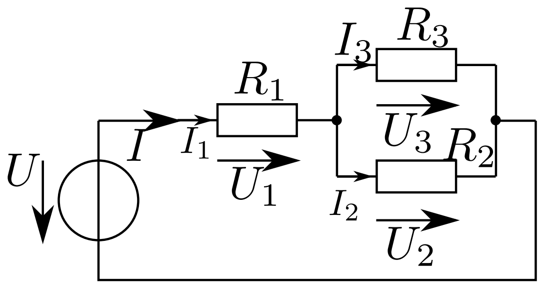



Abbildung 5: Parallel- und Serienschaltung von drei Widerständen

**Lösung:** Die allgemeine Rechnung ist weiter unten gezeigt, hier das Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
R &= R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = 2{,}2000\,\mathrm{k\Omega} \\
I &= \frac{U}{R} = 4{,}5455\,\mathrm{mA} \\
U_1 &= IR_1 = 4{,}5455\,\mathrm{V} \\
U_2 &= U_3 = U - U_1 = 5{,}4545\,\mathrm{V} \\
I_1 &= \frac{U_1}{R_1} = 4{,}5455\,\mathrm{mA} \\
I_2 &= \frac{U_2}{R_2} = 2{,}7273\,\mathrm{mA} \\
I_3 &= \frac{U_3}{R_3} = 1{,}8182\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

(b) Die Widerstände betragen $R_1 = 90\,\Omega$, $R_2 = 9\,\Omega$ $R_3 = 1\,\Omega$ und es wird eine Spannung von $U = 10V$ angelegt. Bestimmen Sie Strom und Spannungen!
**Lösung:** Die allgemeine Rechnung ist weiter unten gezeigt, hier das Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
R &= R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = 90{,}900\,\Omega \\
I &= \frac{U}{R} = 110{,}01\,\mathrm{mA} \\
U_1 &= IR_1 = 9{,}9010\,\mathrm{V} \\
U_2 &= U_3 = U - U_1 = 99{,}010\,\mathrm{mV} \\
I_1 &= \frac{U_1}{R_1} = 110{,}01\,\mathrm{mA} \\
I_2 &= \frac{U_2}{R_2} = 11{,}001\,\mathrm{mA} \\
I_3 &= \frac{U_3}{R_3} = 99{,}010\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

(c) Bestimmen Sie die Spannungen und den Strom sowie den Gesamtwiderstand allgemein!

**Lösung:** Das Ergebnis der allgemeinen Rechnung

$$
\begin{aligned}
R &= R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 + R_3} \\
I &= \frac{U}{R} = U \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \\
U_1 &= I R_1 = U R_1 \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \\
U_2 &= U_3 = U - U_1 = U \left(1 - \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}\right) = U \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \\
I_1 &= \frac{U_1}{R_1} = U \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \\
I_2 &= \frac{U_2}{R_2} = U \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \\
I_3 &= \frac{U_3}{R_3} = U \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}
\end{aligned}
$$

### 4.6 Parallel- und Serienschaltung von drei Widerständen, zweite Variante

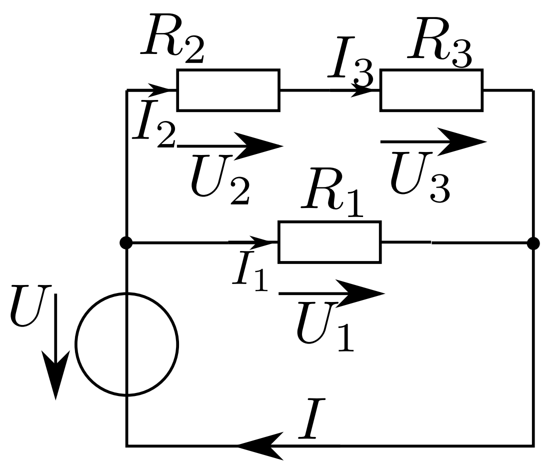



Abbildung 6: Parallel- und Serienschaltung von drei Widerständen

(a) Die Widerstände betragen $R_1 = 1000\,\Omega$, $R_2 = 2000\,\Omega$ $R_3 = 3000\,\Omega$ und es wird eine Spannung von $U = 10V$ angelegt. Bestimmen Sie Strom und Spannungen!

**Lösung:** Die allgemeine Rechnung ist weiter unten gezeigt, hier das Ergebnis:

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2+R_3}} = 833{,}33\,\Omega \\
I &= \frac{U}{R} = 12\,\mathrm{mA} \\
U_1 &= U = 10\,\mathrm{V} \\
I_1 &= \frac{U}{R_1} = 10\,\mathrm{mA} \\
I_2 &= I_3 = \frac{U}{R_2 + R_3} = 2\,\mathrm{mA} \\
U_2 &= I_2 R_2 = 4\,\mathrm{V} \\
U_3 &= I_2 R_3 = 6\,\mathrm{V}
\end{aligned}$$

(b) Die Widerstände betragen $R_1 = 90\,\Omega$, $R_2 = 9\,\Omega$ $R_3 = 1\,\Omega$ und es wird eine Spannung von $U = 10V$ angelegt. Bestimmen Sie Strom und Spannungen!
**Lösung:** Die allgemeine Rechnung ist weiter unten gezeigt, hier das Ergebnis:

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2+R_3}} = 9\,\Omega \\
I &= \frac{U}{R} = 1{,}1111\,\mathrm{A} \\
U_1 &= U = 10\,\mathrm{V} \\
I_1 &= \frac{U}{R_1} = 111{,}11\,\mathrm{mA} \\
I_2 &= I_3 = \frac{U}{R_2 + R_3} = 1\,\mathrm{A} \\
U_2 &= I_2 R_2 = 9\,\mathrm{V} \\
U_3 &= I_2 R_3 = 1\,\mathrm{V}
\end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie die Spannungen und den Strom sowie den Gesamtwiderstand allgemein!
**Lösung:** Das Ergebnis der allgemeinen Rechnung

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2+R_3}} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \\
I &= \frac{U}{R} = U\frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1(R_2 + R_3)} \\
U_1 &= U \\
I_2 &= I_3 = \frac{U}{R_2 + R_3} \\
U_2 &= U\frac{R_2}{R_2 + R_3} \\
U_3 &= U\frac{R_3}{R_2 + R_3}
\end{aligned}$$

## 4.7 Praktische Anwendung: Belasteter Spannungs- und Stromteiler

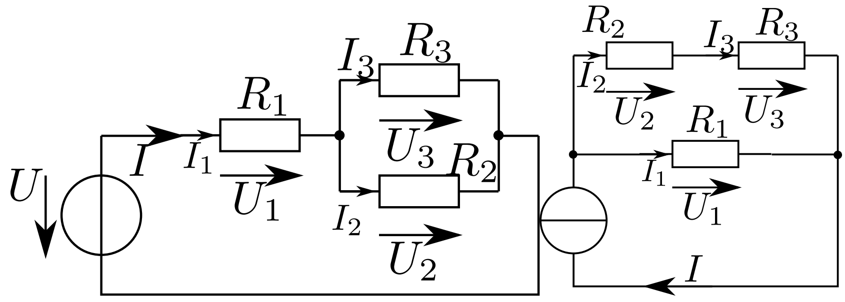



Abbildung 7: Belasteter (a) Spannungs- und (b) Stromteiler wobei jeweils $R_1$,$R_2$ den einfachen Teiler darstellen und $R_3$ ein zusätzlicher Lastwiderstand ist.

(a) Berechnen Sie im Spannungsteiler die Veränderung des Teilungsverhältnisses in Abhängigkeit von der Last, arbeiten Sie im Ergebnis die Widerstandsverhältnisse $R_1/R_2$ und $R_2/R_3$ explizit heraus!
**Lösung:** Zunächst liefert der einfache Spannungsteiler das Verhältnis

$$U_2 = U\frac{R_2}{R_1+R_2} = U\frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}}$$

der dritte Widerstand führt dazu, dass $R_2$ ersetzt werden muss durch

$$R_2 \to \frac{R_2R_3}{R_2+R_3} = R_2\frac{1}{1+\frac{R_2}{R_3}}$$

Was dann zu dem Endergebnis

$$U_2 = U\frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}\left(1+\frac{R_2}{R_3}\right)}$$

(b) Berechnen Sie im Stromteiler die Veränderung des Teilungsverhältnisses in Abhängigkeit von der Last, arbeiten Sie im Ergebnis die Widerstandsverhältnisse $R_1/R_2$ und $R_2/R_3$ explizit heraus!
**Lösung:** Zunächst liefert der einfache Stromteiler das Verhältnis

$$I_2 = I\frac{R_1}{R_1+R_2} = U\frac{1}{1+\frac{R_2}{R_1}}$$

der dritte Widerstand führt dazu, dass $R_2$ ersetzt werden muss durch

$$R_2 \to R_2+R_3 = R_2\left(1+\frac{R_3}{R_2}\right)$$

Was dann zu dem Endergebnis

$$I_2 = I\frac{1}{1+\frac{R_2}{R_1}\left(1+\frac{R_3}{R_2}\right)}$$

(c) Berechnen Sie bei gleichen Widerständen $R_1$ und $R_2$ wie sich Strom und Spannung verhalten, wenn $R_2/R_3$ die Werte 0,01; 0,1; 0,5; 1; 2; 10; 100 annimmt!
**Lösung:**

| $\frac{R_2}{R_3}$ | $\frac{R_3}{R_2}$ | $\frac{U_2}{U}$ | $\frac{I_2}{I}$ |
|---|---|---|---|
| $10 \times 10^{-3}$ | 100 | $497{,}51 \times 10^{-3}$ | $9{,}8039 \times 10^{-3}$ |
| $100 \times 10^{-3}$ | 10 | $476{,}19 \times 10^{-3}$ | $83{,}333 \times 10^{-3}$ |
| $500 \times 10^{-3}$ | 2 | $400 \times 10^{-3}$ | $250 \times 10^{-3}$ |
| 1 | 1 | $333{,}33 \times 10^{-3}$ | $333{,}33 \times 10^{-3}$ |
| 2 | $500 \times 10^{-3}$ | $250 \times 10^{-3}$ | $400 \times 10^{-3}$ |
| 10 | $100 \times 10^{-3}$ | $83{,}333 \times 10^{-3}$ | $476{,}19 \times 10^{-3}$ |
| 100 | $10 \times 10^{-3}$ | $9{,}8039 \times 10^{-3}$ | $497{,}51 \times 10^{-3}$ |

## 4.8 Parallelschaltung von $N$-Widerständen

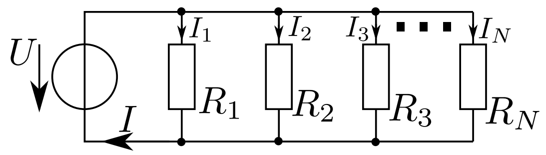



Abbildung 8: Parallelschaltung von $N$-Widerständen

Es sind $N$ Widerstände parallel geschaltet. Hier kann $N$ unter gewissen Bedingungen auch unendlich werden.

(a) Es liegen $N = 10$ Widerstände vor, die der Verteilung $R_n = nR_0$ mit $R_0 = 1{,}0000\,\text{k}\Omega$ genügen. Die Spannung der Quelle ist $U = 100\,\text{V}$. Bestimmen Sie Gesamtwiderstand, und Stromstärken durch die ersten drei Widerstände und den letzten!
**Lösung:** Hier ist es sinnvoll mit Leitwerten zu rechnen, die dann aufsummiert werden. So ist dann

$$G = \sum_{n=1}^{n=N} \frac{1}{nR_0} = 2{,}9290\,\text{mS}$$
$$R = \frac{1}{G} = 341{,}42\,\Omega$$
$$I = \frac{U}{R} = 292{,}90\,\text{mA}$$
$$I_1 = \frac{U}{R_1} = 100\,\text{mA}$$
$$I_2 = \frac{U}{R_2} = 50\,\text{mA}$$
$$I_3 = \frac{U}{R_3} = 33{,}333\,\text{mA}$$
$$I_{10} = \frac{U}{R_{10}} = 10\,\text{mA}$$

(b) Es liegen $N = 5$ Widerstände vor, die der Verteilung $R_n = n^2 R_0$ mit $R_0 = 1{,}0000\,\mathrm{k\Omega}$ genügen. Die Spannung der Quelle ist $U = 100\,\mathrm{V}$. Bestimmen Sie Gesamtwiderstand, und Stromstärken durch die ersten drei Widerstände und den letzten!
**Lösung:** Hier ist es sinnvoll mit Leitwerten zu rechnen, die dann aufsummiert werden. So ist dann

$$\begin{aligned}
G &= \sum_{n=1}^{n=N} \frac{1}{n^2 R_0} = 1{,}4636\,\mathrm{mS} \\
R &= \frac{1}{G} = 683{,}24\,\Omega \\
I &= \frac{U}{R} = 146{,}36\,\mathrm{mA} \\
I_1 &= \frac{U}{R_1} = 100\,\mathrm{mA} \\
I_2 &= \frac{U}{R_2} = 25\,\mathrm{mA} \\
I_3 &= \frac{U}{R_3} = 11{,}111\,\mathrm{mA} \\
I_5 &= \frac{U}{R_5} = 4\,\mathrm{mA}
\end{aligned}$$

(c) Es liegen $N = \infty$ Widerstände vor (also unendlich viele), die der Verteilung $R_n = n^2 R_0$ mit $R_0 = 1{,}0000\,\mathrm{k\Omega}$ genügen. Die Spannung der Quelle ist $U = 100\,\mathrm{V}$. Bestimmen Sie Gesamtwiderstand, Stromstärken durch die ersten drei Widerstände und den letzten!
**Lösung:** Hier muss man die Konvergenz der Reihensumme der Leitwerte bestimmen. Nur wenn die Summe konvergent ist, macht die Rechnung überhaupt einen Sinn. Das ist sie hier, eine Formelsammlung ergibt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449.$$

und so ist

$$\begin{aligned}
G &= \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2 R_0} = \frac{\pi^2}{6R_0} = 1{,}6449\,\mathrm{mS} \\
R &= \frac{1}{G} = 607{,}93\,\Omega \\
I &= \frac{U}{R} = 164{,}49\,\mathrm{mA} \\
I_1 &= \frac{U}{R_1} = 100\,\mathrm{mA} \\
I_2 &= \frac{U}{R_2} = 25\,\mathrm{mA} \\
I_3 &= \frac{U}{R_3} = 11{,}111\,\mathrm{mA} \\
I_\infty &= 0
\end{aligned}$$

(d) Es liegen $N = \infty$ Widerstände vor (also unendlich viele), die der Verteilung $R_n = 2^n R_0$ mit $R_0 = 1{,}0000\,\text{k}\Omega$ genügen. Die Spannung der Quelle ist $U = 100\,\text{V}$. Bestimmen Sie Gesamtwiderstand, Stromstärken durch die ersten drei Widerstände und den letzten!
**Lösung:** Hier muss man die Konvergenz der Reihensumme der Leitwerte bestimmen. Nur wenn die Summe konvergent ist, macht die Rechnung überhaupt einen Sinn. Das ist sie hier, eine Formelsammlung ergibt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

und so ist

$$\begin{aligned}
G &= \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{2^n R_0} = \frac{1}{R_0} = 1\,\text{mS} \\
R &= \frac{1}{G} = 1{,}0000\,\text{k}\Omega \\
I &= \frac{U}{R} = 100\,\text{mA} \\
I_1 &= \frac{U}{R_1} = 50\,\text{mA} \\
I_2 &= \frac{U}{R_2} = 25\,\text{mA} \\
I_3 &= \frac{U}{R_3} = 12{,}500\,\text{mA} \\
I_\infty &= 0
\end{aligned}$$

## 4.9 Serienschaltung von $N$-Widerständen

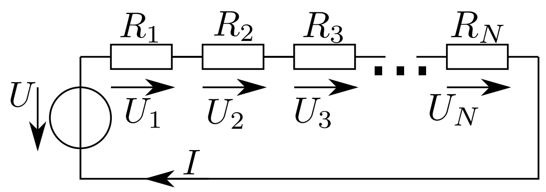



Abbildung 9: Serienschaltung von $N$-Widerständen

Es sind $N$ Widerstände in Serie geschaltet. Hier kann $N$ unter gewissen Bedingungen auch unendlich werden.

(a) Es liegen $N = 10$ Widerstände vor, die der Verteilung $R_n = R_0/n$ mit $R_0 = 1{,}0000\,\text{k}\Omega$ genügen. Die Spannung der Quelle ist $U = 100\,\text{V}$. Bestimmen Sie Gesamtwiderstand, Strom und Spannungen über den ersten drei Widerstände und dem letzten!

**Lösung:**

$$
\begin{aligned}
R &= \sum_{n=1}^{n=N} \frac{R_0}{n} = 2{,}9290\,\mathrm{k\Omega} \\
I &= \frac{U}{R} = 34{,}142\,\mathrm{mA} \\
U_1 &= IR_1 = 34{,}142\,\mathrm{V} \\
U_2 &= IR_2 = 17{,}071\,\mathrm{V} \\
U_3 &= IR_3 = 11{,}381\,\mathrm{V} \\
U_{10} &= IR_{10} = 3{,}4142\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

(b) Es liegen $N = 5$ Widerstände vor, die der Verteilung $R_n = R_0/n^2$ mit $R_0 = 1{,}0000\,\mathrm{k\Omega}$ genügen. Die Spannung der Quelle ist $U = 100\,\mathrm{V}$. Bestimmen Sie Gesamtwiderstand, Strom und Spannungen über den ersten drei Widerstände und dem letzten!
**Lösung:**

$$
\begin{aligned}
R &= \sum_{n=1}^{n=N} \frac{R_0}{n^2} = 1{,}4636\,\mathrm{k\Omega} \\
I &= \frac{U}{R} = 68{,}324\,\mathrm{mA} \\
U_1 &= IR_1 = 68{,}324\,\mathrm{V} \\
U_2 &= IR_2 = 17{,}081\,\mathrm{V} \\
U_3 &= IR_3 = 7{,}5916\,\mathrm{V} \\
U_5 &= IR_5 = 2{,}7330\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

(c) Es liegen $N = \infty$ Widerstände vor (also unendlich viele), die der Verteilung $R_n = R_0/n^2$ mit $R_0 = 1{,}0000\,\mathrm{k\Omega}$ genügen. Die Spannung der Quelle ist $U = 100\,\mathrm{V}$. Bestimmen Sie Gesamtwiderstand, Strom und Spannungen über den ersten drei Widerstände und dem letzten!
**Lösung:** Hier muss man die Konvergenz der Reihensumme der Widerstandswerte bestimmen. Nur wenn die Summe konvergent ist, macht die Rechnung überhaupt einen Sinn. Das ist sie hier, eine Formelsammlung ergibt

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449.
$$

und so ist

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{R_0}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} R_0 \approx 1{,}6449\,\mathrm{k\Omega} \\
I &= \frac{U}{R} = 60{,}793\,\mathrm{mA} \\
U_1 &= IR_1 = 60{,}793\,\mathrm{V} \\
U_2 &= IR_2 = 15{,}198\,\mathrm{V} \\
U_3 &= IR_3 = 6{,}7547\,\mathrm{V} \\
U_\infty &= 0
\end{aligned}$$

(d) Es liegen $N = \infty$ Widerstände vor (also unendlich viele), die der Verteilung $R_n = R_0/2^n$ mit $R_0 = 1{,}0000\,\mathrm{k\Omega}$ genügen. Die Spannung der Quelle ist $U = 100\,\mathrm{V}$. Bestimmen Sie Gesamtwiderstand, Strom und Spannungen über den ersten drei Widerstände und dem letzten!
**Lösung:** Hier muss man die Konvergenz der Reihensumme der Widerstandswerte bestimmen. Nur wenn die Summe konvergent ist, macht die Rechnung überhaupt einen Sinn. Das ist sie hier, eine Formelsammlung ergibt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

und so ist

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{R_0}{2^n} = R_0 = 1{,}0000\,\mathrm{k\Omega} \\
I &= \frac{U}{R} = 100\,\mathrm{mA} \\
U_1 &= IR_1 = 50\,\mathrm{V} \\
U_2 &= IR_2 = 25\,\mathrm{V} \\
U_3 &= IR_3 = 12{,}500\,\mathrm{V} \\
U_\infty &= 0
\end{aligned}$$

## 4.10 Verkettung von $N$-Serien-Parallelschaltungen: $R - 2R$-Netzwerk

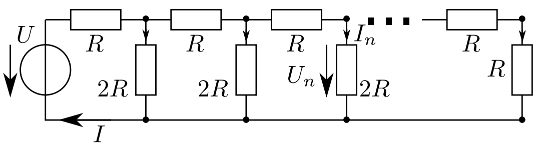



Abbildung 10: Das sogenannte $R - 2R$-Netzwerk

$N$-Zellen von Widerständen mit den Werten $R$ und dem doppelten $2R$ werden hintereinander geschaltet, nur die letzte Zelle ist anders aufgebaut. Dieses Netzwerk macht nur Sinn, es allgemein zu untersuchen. Bestimmen Sie daher allgemein alle Ströme und Spannungen durch bzw. über die masseverbundenen Widerstände.

**Lösung:** Zunächst wird die letzte Zelle betrachtet. Hier wird die anliegende Spannung geteilt, also ist

$$U_N = \frac{U_{N-1}}{2} \qquad I_N = \frac{U_N}{2R}R \qquad = 2R.$$

Dieser Gesamtwiderstand der letzten Zelle ist parallel zum Massewiderstand der vorhergehenden, also liegt hier eine Parallelschaltung von $2R$ mit $2R$ vor, so dass effektiv die vohergehende Zelle so aussieht wie die letzte und damit alle Zellen gleich aussehen. Nun kann man also von vorne rechnen und stellt fest, dass in jeder Zelle die Spannung halbiert wird, also

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{U}{2^n} \\ I_n &= \frac{U}{2^{n+1}R} \\ I_{zelle}n &= \frac{U}{2^n R} \\ I_{ges} &= \frac{U}{2R}. \end{aligned}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst. Eine solche Schaltung kann man nun z.B. als Digital-Analog-Wandler einsetzen.

### 4.11 Verkettung von $N$-Serien-Parallelschaltungen: Allgemeiner Fall

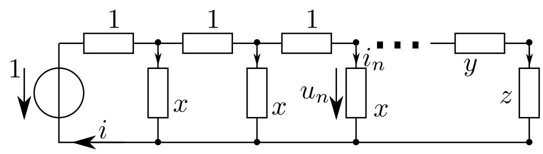



Abbildung 11: Verkettete Zellen, Darstellung ist normiert

$N$-Zellen von Widerständen mit den Werten 1 in längs und $x$ zur Masse werden zur beliebigen Spannungsteilung verwendet.

(a) Dimensionieren Sie allgemein die Parameter $x$,$y$,$z$ so, dass von einer Stufe zur anderen die Spannung auf den Faktor $c$ der vorherigen sinkt, also $u_n = cu_{n-1}$ gilt. Als Tipp: Starten Sie mit der Annahme einer unendlich langen Struktur (also ohne $y$,$z$).
**Lösung:** Wenn man von einer unendlich langen Struktur ausgeht, dann sind alle Zellen gleich und präsentieren der links liegenden einen Widerstand von $r_n$. Dieser liegt dann parallel zu $x$ und beides in Serie zu 1 und für die nun weiter links liegenden Zelle erscheint wieder der gleiche Widerstand $r_n$. Also erhält man

$$r_n = 1 + \frac{xr_n}{x + r_n}.$$

In der Zelle liegt nun ein Spannungsteiler um den Faktor $c$ vor:

$$c = \frac{\frac{xr_n}{x+r_n}}{1 + \frac{xr_n}{x+r_n}}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen können $r_n$ und $x$ bestimmt werden. Das ist aufwändig, geht aber. Man beginnt mit der ersten Gleichung

$$\begin{aligned} r_n^2 + x r_n &= x + r_n + x r_n \\ \Leftrightarrow r_n^2 &= x + r_n \\ \Leftrightarrow \left(r_n - \frac{1}{2}\right)^2 &= x + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow r_n &= \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

In der Lösung machte nur das positive Vorzeichen physikalischen Sinn. Aus der zweiten Gleichung erhält man dann (man verwendet zunächst zweimal den Zusammenhang $r_n^2 = x + r_n$ zur Vereinfachung)

$$\begin{aligned} c &= \frac{x r_n}{x + r_n + x r_n} \\ \Leftrightarrow c &= \frac{x r_n}{r_n^2 + x r_n} = \frac{x}{r_n + x} = \frac{x}{r_n^2} \\ &= \frac{x}{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}\right)^2} \\ \Leftrightarrow c \left(\frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}\right)^2 &= x \\ \Leftrightarrow c \left(\frac{1}{4} + x + \frac{1}{4} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}\right) &= x \\ \Leftrightarrow c \left(\frac{1}{2} + x + \sqrt{x + \frac{1}{4}}\right) &= x \end{aligned}$$

Mit der Abkürzung/ Substitution

$$\begin{aligned} x' &= \sqrt{x + \frac{1}{4}} \\ \Leftrightarrow x'^2 &= x + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ergibt sich die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned}
c\left(\frac{1}{2}+x'^2-\frac{1}{4}+x'\right) &= x'^2-\frac{1}{4}\\
\Leftrightarrow c\left(x'^2+x'+\frac{1}{4}\right) &= x'^2-\frac{1}{4}\\
\Leftrightarrow x'^2(1-c)-cx'-\frac{1}{4}(1+c) &= 0\\
\Leftrightarrow x'^2-\frac{cx'}{1-c}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1+c}{1-c} &= 0\\
\Leftrightarrow \left(x'-\frac{c}{2(1-c)}\right)^2 &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1+c}{1-c}+\frac{c^2}{4(1-c)^2}\\
\Leftrightarrow &= \frac{1}{4}\frac{1}{(1-c)^2}\\
\Leftrightarrow x' &= \frac{c}{2(1-c)}+\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1-c)^2}}\\
&= \frac{c}{2(1-c)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-c}\\
&= \frac{1+c}{2(1-c)}\\
\Rightarrow x &= \left(\frac{1+c}{2(1-c)}\right)^2-\frac{1}{4}\\
&= \frac{1+2c+c^2}{4(1-c)^2}-\frac{1-2c+c^2}{4(1-c)^2}=\frac{c}{(1-c)^2}\\
\Rightarrow r_n &= \frac{1}{2}+\frac{1+c}{2(1-c)}=\frac{1}{1-c}\,.
\end{aligned}$$

Nun bleibt noch die letzte Zelle aus $y$,$z$ zu bestimmen. Hier muss sein

$$\begin{aligned}
r_n &= y+z\\
c &= \frac{z}{r_n}\\
\to z &= cr_n=\frac{c}{1-c}\\
y &= r_n-z=1
\end{aligned}$$

Das löst das Problem komplett.

(b) Verifizieren Sie die Lösung mit den Anforderungen des $R-2R$-Netzwerkes!
**Lösung:** Hier ist $c = 500\times 10^{-3}$ und damit

$$\begin{aligned}
x &= 2\\
r_n &= 2\\
y &= 1\\
y &= 1
\end{aligned}$$

(c) Modifizieren Sie die Aufgabe und Lösung so, dass eine Spannungsquelle mit Innenwiderstand eingesetzt werden kann. Die erste „1“ ist dann der Innenwiderstand und der Rest der Schaltung mit dem ersten „$x$“ soll den Wert des Innenwiderstandes entsprechen. .

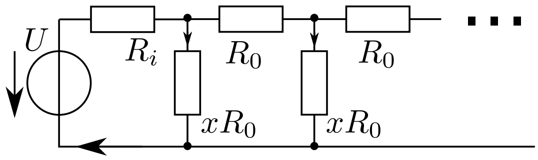



Abbildung 12: Modifikation für eine Quelle mit Innenwiderstand

**Lösung:** Hier soll gelten, dass

$$\frac{xR_0 r_n R_0}{xR_0 + r_n R_0} = R_i = \frac{x r_n R_0}{x + r_n}$$

$r_n$,$x$ können eindeutig aus $c$ bestimmt werden, so dass die zweite Gleichung nach $R_0$ aufgelöst werden kann.

$$R_i = \frac{x r_n R_0}{x + r_n}$$
$$\Leftrightarrow R_0 = R_i \frac{x + r_n}{x r_n}$$

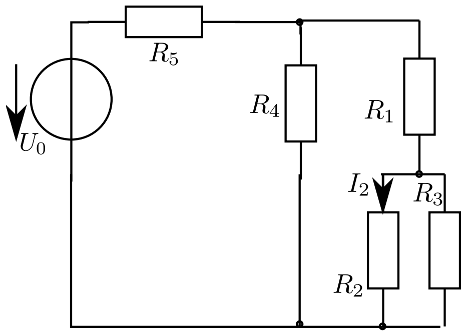
(d) Erstellen Sie eine Tabelle für
$c = \{10 \times 10^{-3}; 100 \times 10^{-3}; 333{,}33 \times 10^{-3}; 500 \times 10^{-3}; 666{,}70 \times 10^{-3}; 900 \times 10^{-3}; 990 \times 10^{-3}\}$
und
$R_i = 50\,\Omega$!
**Lösung:** Die passenden Formeln sind alle gegeben, man hat dann

| $c$ | $x$ | $r_n$ | $R_0$ | $xR_0$ | $z$ | $zR_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $10 \times 10^{-3}$ | $10{,}2 \times 10^{-3}$ | 1,01 | $4{,}95 \times 10^{3}$ | 50,5 | $10{,}1 \times 10^{-3}$ | 50 |
| $100 \times 10^{-3}$ | $123 \times 10^{-3}$ | 1,11 | 450 | 55,6 | $111 \times 10^{-3}$ | 50 |
| $333 \times 10^{-3}$ | $750 \times 10^{-3}$ | 1,50 | 100 | 75,0 | $500 \times 10^{-3}$ | 50 |
| $500 \times 10^{-3}$ | 2 | 2 | 50 | 100 | 1 | 50 |
| $667 \times 10^{-3}$ | 6,00 | 3,00 | 25,0 | 150 | 2,00 | 50 |
| $900 \times 10^{-3}$ | 90 | 10 | 5,56 | 500 | 9 | 50 |
| $990 \times 10^{-3}$ | $9{,}90 \times 10^{3}$ | 100 | $505 \times 10^{-3}$ | $5{,}00 \times 10^{3}$ | 99 | 50 |

# 5 Berechnung von Gleichstromkreisen 1

## 5.1 Spannungs- und Stromteiler

Berechnen Sie den Strom $I_2$ durch $R_2$ mit Hilfe der



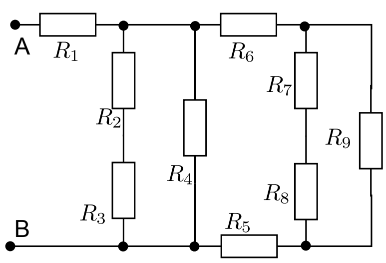

(a) Stromteilerregel

(b) Spannungsteilerregel
**Lösung:** In beiden Fällen ist die Lösung

$$I_2 = \frac{R_3 R_4 U_0}{R_5 \left[(R_4 + R_1)(R_2 + R_3) + R_2 R_3\right] + R_4 \left[R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3\right]}$$

## 5.2 Schrittweise Vereinfachung

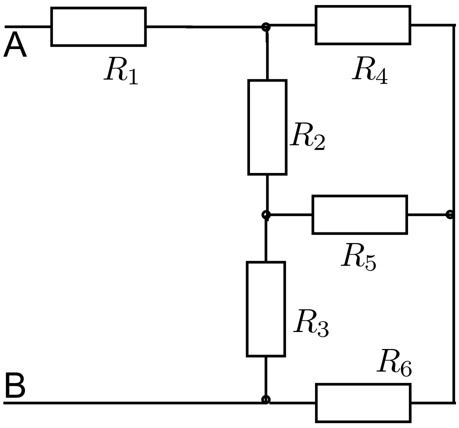
Berechnen Sie den Gesamtwiderstand der Schaltung bezüglich der Klemmen A-B durch schrittweise Vereinfachung. Alle Widerstände haben 1Ω. Wer Spaß daran hat, möge es symbolisch berechnen!




...
**Lösung:** ...das sollte nun selber gehen.... Das Endergebnis ist $R_{AB} = \frac{23}{15},\Omega = 1{,}5\overline{3}\,\Omega$.

## 5.3 Berechnung mit Stern-Dreiecksumwandlung

Für die skizzierte Schaltung ist der Widerstand zwischen den Punkten A und B zu berechnen. ($R_1 = 50\,\Omega$, $R_2 = R_4 = 20\,\Omega$, $R_5 = 30\,\Omega$, $R_3 = R_6 = 10\,\Omega$ ).




**Lösung:**
Die Brücke ist abgeglichen und zudem sind $R_2 + R_3 = R_4 + R_6 = 30\,\Omega$, daher kann man $R_5$ vernachlässigen und so ist der Gesamtwiderstand

$$\begin{aligned} R_{ges} &= R_1 + (R_2 + R_3)||(R_4 + R_6) \\ &= R_1 + \frac{R_2 + R_3}{2} = 65\,\Omega \end{aligned}$$

Wer's nicht gesehen hat, der kann aber auch mittels Dreiecks-Stern-Umformung zum Ziel kommen:
Zuerst wandeln wir einen der Sterne (4,5,6) oder (2,5,3) in eine Dreiecksschaltung um. Wir wählen letztere und erhalten dann

$$\begin{aligned} R_2' &= \frac{R_2R_5 + R_2R_3 + R_3R_5}{R_5} = \frac{1100\,\Omega^2}{30\,\Omega} = 36\frac{2}{3}\,\Omega \\ R_3' &= \frac{R_2R_5 + R_2R_3 + R_3R_5}{R_2} = 55\,\Omega \\ R_5' &= \frac{R_2R_5 + R_2R_3 + R_3R_5}{R_3} = 110\,\Omega \end{aligned}$$

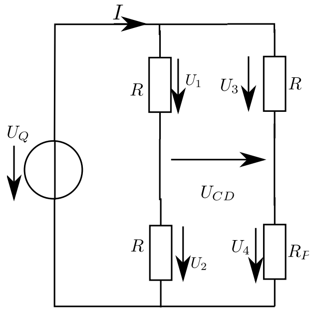
Die Parallelschaltungen ergeben nun

$$\begin{aligned} R_5'||R_4 &= \frac{R_5'R_4}{R_5' + R_4} = 2200/130\,\Omega = 16{,}923\,\Omega \\ R_3'||R_6 &= \frac{R_3'R_6}{R_3' + R_6} = 550/65\,\Omega = 8{,}462\,\Omega \\ R_2'||(R_3'||R_6 + R_5'||R_4) &= \frac{(16{,}923 + 8{,}462)36{,}667}{16{,}923 + 8{,}462 + 36{,}667}\,\Omega = \frac{930{,}78}{62{,}052}\,\Omega = 15\,\Omega \end{aligned}$$

Nun noch die Reihenschaltung mit $R_1$ und wir erhalten $R_{ges} = 65\,\Omega$ als Endergebnis für den Widerstand zwischen den Punkten A und B.

## 5.4 Brücke

Die skizzierte Wheatstonebrücke mit drei gleichen Nickelinwiderständen $R$ und einem Platinwiderstand $R_P$ eignet sich für Temperaturmessungen. Bei 20°C sind alle vier Widerstände gleich, so dass die Spannung $U_{CD}$ Null ist. Bei höheren Temperaturen sind aufgrund der verschiedenen Temperaturkoeffizienten die Widerstände $R$ und $R_P$ unterschiedlich, so dass sich die Spannung $U_{CD}$ mit der Temperatur ändert.




(a) Wie lautet die Formel für die Spannung $U_{CD}$ in Abhängigkeit von $\alpha_{20}$, $\alpha_{P20}$, $R_P$, $R$, $U$, $\Delta T$?
**Lösung:** Bei 20°C ist die Brücke abgeglichen, also gilt $U_1 = U_2 = U_3 = U_4$ und natürlich auch $R = R_P$. Ändert sich die Spannung so bleiben $U_1 = U_2$ gleich wie vorher, für die Differenzspannung gilt $U_{CD} = U_2 - U_4$. Der Spannungsteiler aus $R$ und $R_P$ ändert sich und zwar nach

$$\begin{aligned} U_4 &= U_Q \frac{R_P(T)}{R(T) + R_P(T)} = \frac{R(1 + \alpha_{P20}\Delta T)}{R(1 + \alpha_{20}\Delta T) + R_P(1 + \alpha_{P20}\Delta T)} \\ &= U_Q \frac{(1 + \alpha_{P20}\Delta T)}{2 + (\alpha_{20} + \alpha_{P20})\Delta T} \end{aligned}$$

.

und damit erfolgt als Endergebnis

$$U_{CD} = U_Q \left( \frac{1}{2} - \frac{(1 + \alpha_{P20}\Delta T)}{2 + (\alpha_{20} + \alpha_{P20})\Delta T} \right).$$

(b) Berechnen Sie für $\Delta T = 50°\mathrm{C}$ die Spannung $U_{CD}$, wenn $\alpha_{20} = 0{,}23 \times 10^{-3}°\mathrm{C}^{-1}$ und $\alpha_{P20} = 0{,}002°\mathrm{C}^{-1}$ und $U = 10\,\mathrm{V}$ betragen.
**Lösung:** Einsetzen bringt uns dann $U_{CD} = -209{,}57\,\mathrm{mV}$.

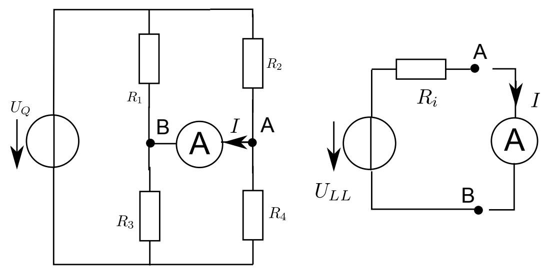
(c) Berechnen Sie $\Delta T$ als Funktion von $U_{CD}$ nach der in a) berechneten Formel.
**Lösung:** Wir lösen auf:

$$\begin{aligned} \frac{U_{CD}}{U_Q} - \frac{1}{2} &= -\frac{(1 + \alpha_{P20}\Delta T)}{2 + (\alpha_{20} + \alpha_{P20})\Delta T} \\ \Leftrightarrow \left( \frac{U_{CD}}{U_Q} - \frac{1}{2} \right) (2 + (\alpha_{20} + \alpha_{P20})\Delta T) &= -1 - \alpha_{P20}\Delta T \\ \Leftrightarrow \left( 2\frac{U_{CD}}{U_Q} - 1 \right) + 1 &= -\alpha_{P20}\Delta T - \left( \frac{U_{CD}}{U_Q} - \frac{1}{2} \right) (\alpha_{20} + \alpha_{P20})\Delta T \\ \Leftrightarrow \Delta T &= -2\frac{U_{CD}}{U_Q} \frac{1}{\alpha_{P20} + \left( \frac{U_{CD}}{U_Q} - \frac{1}{2} \right) (\alpha_{P20} + \alpha_{20})} \end{aligned}$$

Wenn man nun von dem abgeglichenen Fall ausgeht, in dem $U_{CD} \approx 0\,\mathrm{V}$ ist, dann kann man weiter vereinfachen und bekommt

$$\Delta T \approx -4\frac{U_{CD}}{U_Q} \cdot \frac{1}{\alpha_{P20} - \alpha_{20}}.$$

## 5.5 Strom in der Brücke




Die oben gezeichnete Brückenschaltung ist weiter zu analysieren. Als Ziel soll die Empfindlichkeit der Brückenschaltung berechnet werden.

(a) Bestimmen Sie die Parameter der äquivalenten Spannungsquelle der Brücke bezüglich der Klemmen A und B!
**Lösung:** Der Innenwiderstand kann einfach bestimmt werden, indem die Spannungsquelle durch einen Kurzschluss ersetzt wird. Es ergibt sich also

$$\begin{aligned} R_i &= \frac{R_1R_3}{R_1+R_3} + \frac{R_2R_4}{R_2+R_4} \\ &= \frac{R_1R_3(R_2+R_4)+R_2R_4(R_1+R_3)}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)} \end{aligned}$$

Und die Leerlaufspannung wird durch die Spannungsteiler $R_2, R_4$ und $R_1$,$R_3$ bestimmt. und es ist

$$\begin{aligned} U_{LLAB} &= U_4 - U_3 = U_Q\frac{R_4}{R_2+R_4} - U_Q\frac{R_3}{R_1+R_3} \\ &= U_Q\frac{R_4(R_1+R_3)-R_3(R_2+R_4)}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)} \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie den Strom, der durch einen idealen Strommesser fließt!
**Lösung:** Das wäre ja der Kurzschlussstrom der äquivalenten Quelle, also

$$I = \frac{U_{LLAB}}{R_i} = U_Q\frac{R_4(R_1+R_3)-R_3(R_2+R_4)}{R_1R_3(R_2+R_4)+R_2R_4(R_1+R_3)}$$

(c) (*) Dieses ist zum Knobeln! Bestimmen Sie die Empfindlichkeit der Schaltung bei kleinen Abweichungen des zu messenden Widerstandes $R_3$! Folgende Tipps zum Vorgehen:

- Setzen Sie $R_3 \to R_3(1+\Delta)$, wobei $\Delta$ eben die Abweichung ist.
- Verwenden Sie die Abgleichbedingung als $a = \frac{R_3}{R_1} = \frac{R_4}{R_2}$

- Klammern Sie in dem Ausdruck für $I$ in Zähler und Nenner jeweils $R_1 R_2$ aus und drücken Sie soviel wie möglich in $a$ aus.
- Nähern sie für kleine Abweichungen $\Delta$

...

**Lösung:** Erstmal Klammern wir aus und vereinfachen wir und es ergibt sich:

$$I = U_Q \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2} \cdot \frac{(1 + \frac{R_3}{R_1}) - (1 + \frac{R_4}{R_2})}{R_3(1 + \frac{R_4}{R_2}) + R_4(1 + \frac{R_3}{R_1})}$$

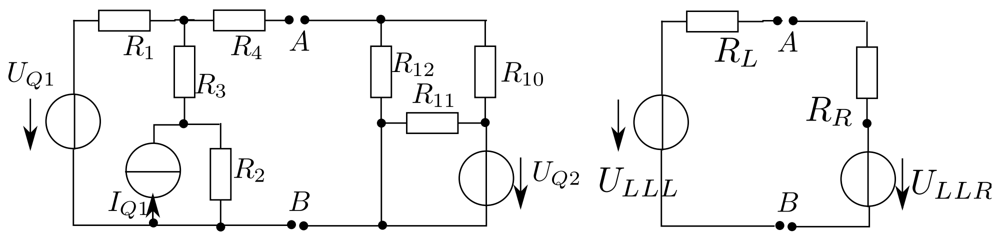
unter Verwendung der o.g. Abkürzungen erhält man nun:

$$I = U \frac{a\Delta}{(1+a)\left[R_4 + R_3(1+\Delta)\right] + R_4 a\Delta}$$

Und mit der Näherung $\Delta \ll 1$ folgt ($\Delta$ wird im Nenner vernachlässigt)

$$I = U \frac{a\Delta}{(1+a)(R_4 + R_3)}.$$

## 5.6 Ersatzspannungsquelle

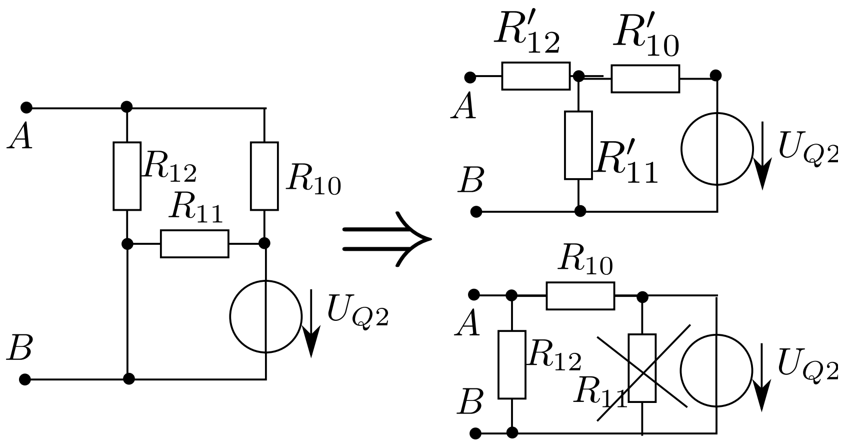



Berechnen Sie die Spannung $U_{AB}$. Teilen Sie dazu das Netzwerk an diesen Punkten in einen linken und einen rechten Teil auf und berechnen Sie jeweils die linksseitige und rechtseitige äquivalente Spannungsquelle. Danach können Sie alles zu einer einfachen Masche wieder zusammenführen und die gesuchte Spannung berechnen. Das Ergebnis darf als Abkürzungen die Parameter der Ersatzquellen enthalten.

**Lösung:** Links ist die Stromquelle in eine Spannungsquelle umzuwandeln und dann erhält man leicht

$$\begin{aligned} U_{LLL} &= \frac{U_{Q1}(R_2 + R_3) + I_{Q1} R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_L &= R_4 + \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \end{aligned}$$

Rechts ist es etwas schwieriger. Zuerst muss das Dreieck gebildet aus den Widerständen in einen Stern umgewandelt werden mit:




$$\begin{aligned}
R'_{10} &= \frac{R_{10}R_{11}}{R_{10}+R_{11}+R_{12}} \\
R'_{11} &= \frac{R_{11}R_{12}}{R_{10}+R_{11}+R_{12}} \\
R'_{12} &= \frac{R_{10}R_{12}}{R_{10}+R_{11}+R_{12}}
\end{aligned}$$

Und dann sind der Innenwiderstand und die Leerlaufspannung

$$\begin{aligned}
R_R &= \frac{R_{10}R_{12}}{R_{10}+R_{12}} \\
U_{LLR} &= U_{Q2}\frac{R'_{11}}{R'_{10}+R'_{11}} \\
&= U_{Q2}\frac{R_{11}R_{12}}{R_{10}R_{11}+R_{11}R_{12}} \\
&= U_{Q2}\frac{R_{12}}{R_{10}+R_{12}}.
\end{aligned}$$

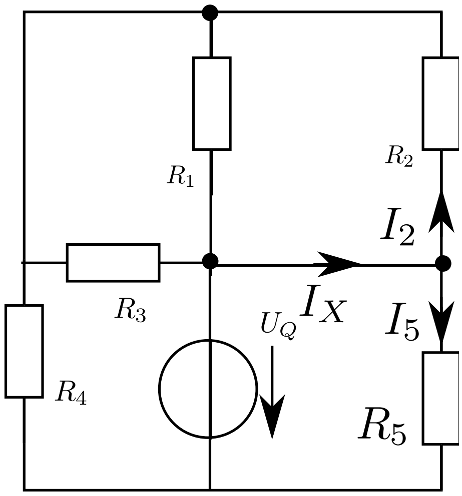
Alternativ kann man auch die Schaltung umzeichnen und sieht, dass $R_{11}$ dann parallel zu der (idealen) Spannungsquelle $U_{Q2}$ zu liegen kommt. Dieser Widerstand hat also nichts mit dem Endergebnis zu tun und kann einfach weggelassen werden. Durch Übung sieht man das schneller! Und am Ende erfolgt der Maschenumlauf mit

$$\begin{aligned}
IR_R + IR_L + U_{LLR} - U_{LLL} &= 0 \\
\Leftrightarrow I &= \frac{U_{LLL}+U_{LLR}}{R_R+R_L}
\end{aligned}$$

Und weiter folgt dann für die gesuchte Spannung zwischen den Klemmen A, B:

$$\begin{aligned}
U_{AB} &= IR_R + U_{LLR} = \frac{U_{LLL}-U_{LLR}}{R_R+R_L}R_R + U_{LLR} \\
&= \frac{U_{LLL}R_R + U_{LLR}R_L}{R_R+R_L}.
\end{aligned}$$

## 5.7 Aufteilung




Die dargestellte Schaltung enthält die Widerstände $R_1 = 50\,\Omega, R_2 = 45\,\Omega, R_3 = 40\,\Omega, R_4 = 55\,\Omega, R_5 = 60\,\Omega$. Die vorhandenen Spannungsquelle liefert die Spannung $U_Q = 48\,\mathrm{V}$. Wie groß ist der Strom $I_X$?

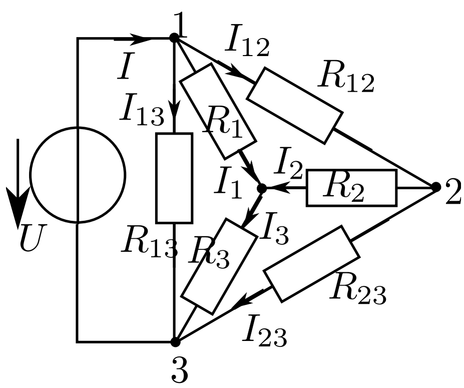
**Lösung:** Strom durch $R_5$ ist $I_5 = U_Q/R_5 = 0{,}8\,\mathrm{A}$.

Strom durch $R_2$ wird bestimmt durch den Gesamtstrom durch $R_4$ und das vorgeschaltete Konstrukt aus der Parallelschaltung von $R_1$,$R_2$,$R_3$ und dann dem Stromteiler auf $R_2$, also

$$\begin{aligned} I_4 &= U_Q \frac{1}{R_4 + \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}} \\ &= 0{,}6869\,\mathrm{A} \\ I_2 &= I_4 \frac{R_1 R_3}{R_2(R_1 + R_3) + R_1 R_3} = 0{,}227\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

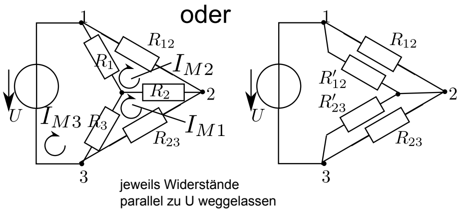
Das Endergebnis ist dann wohl $I_X = 1{,}027\,\mathrm{A}$.

## 5.8 Stern und Dreieck




Die skizzierte Schaltung mit den Widerständen $R_1 = R_2 = R_{23} = 3\,\Omega$ und $R_3 = R_{12} = R_{13} = 1\,\Omega$ liegt an der Spannung $U = 4{,}5\,\mathrm{V}$. Bestimmen Sie alle Teilströme!

**Lösung:**




$R_{13}$ liegt parallel zur idealen Spannungsquelle, damit fließen dort $I_{13} = U/R_{13} = 4{,}5\,\mathrm{A}$
Und nun gibt es mindestens vier Wege zum Ziel, ich führe nur zwei auf:

(a) Maschenstomverfahren:

Wir führen die Ströme in den Maschen wie bezeichnet ein und erhalten die Matrix

$$\begin{pmatrix} R_1+R_3 & -R_1 & -R_3 \\ -R_1 & R_{12}+R_1+R_2 & -R_2 \\ -R_3 & -R_2 & R_3+R_2+R_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -3 & 7 & -3 \\ -1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5\mathrm{V} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

Aus diesen Maschenströmen ergeben sich dann alle anderen zu

$$\begin{aligned} I_1 = I_{M1} - I_{M2} = 1\,\mathrm{A}, \qquad & I_2 = I_{M2} - I_{M3} = 0{,}5\,\mathrm{A} \\ I_3 = I_{M1} - I_{M3} = 1{,}5\,\mathrm{A}, \qquad & I_{12} = I_{M2} = 1{,}5\,\mathrm{A} \\ I_{23} = I_{M3} = 1\,\mathrm{A}, \qquad & I_{13} = 4{,}5\,\mathrm{A} \\ I \quad = \quad & I_{13} + I_{M1} = 7\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

(b) Oder man nimmt eine Stern-Dreiecks-Umformung (z.B. des inneren Sterns) vor und bestimmt erstmal das Potenzial des Punktes (2). Man erhält die notwendigen Dreieckswiderstände

$$R'_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} = 15\Omega,\ R'_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} = 5\Omega$$

Und bestimmt mit dem Spannungsteiler ($R_{12}||R'_{12} = \frac{15}{16}\Omega$ und $R_{23}||R'_{23} = \frac{15}{8}\Omega$) das Teilungsverhältnis zu 2:1 und damit die Spannung an Punkt 2 zu $U_2 = 3\,\mathrm{V}$. Es fehlt das Potential des Sternpunktes, das wir aber auch nicht brauchen, denn es gilt

$$\begin{aligned} I_1 R_1 + I_3 R_3 &= U \\ I_3 R_3 + I_2 R_2 &= U_2 \\ I_1 + I_2 &= I_3 \end{aligned}$$

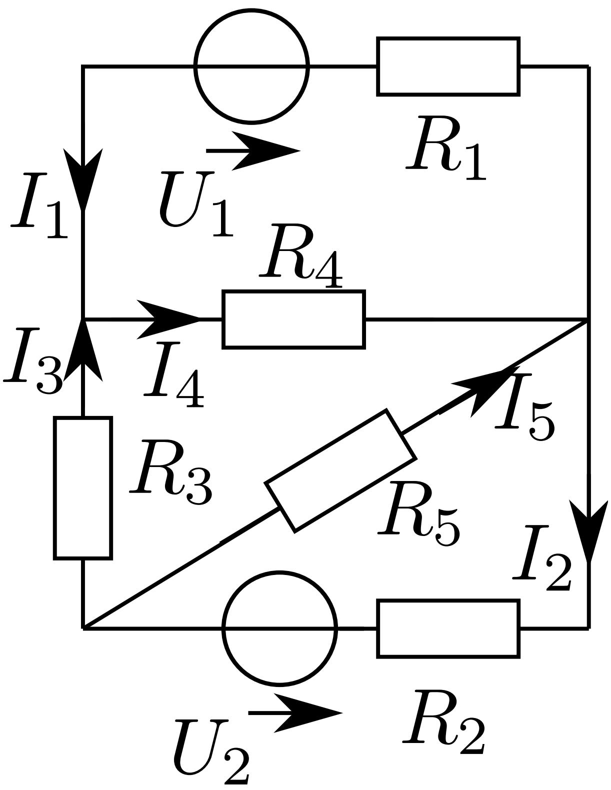
Und durch einsetzen in das Gleichungssystem und rechnen erhält man dann $I_2 = 0{,}5\,\mathrm{A}$ und $I_1 = 1\,\mathrm{A}$. Weitere Dinge folgen dann durch die Ströme durch die Dreieckswiderstände und die erste Kirchhoffsche Regel an den jeweiligen Punkten.

# 6 Maschenstrom- und Überlagerungsverfahren

## 6.1 Überlagerungsverfahren oder Maschenstromanalyse

Bestimmen Sie ein der im Bild gegebenen Schaltung alle Ströme und Spannungen nach dem Überlagerungsverfahren und nach dem Maschenstromverfahren.
Die Elementwerte sind

$U_1 = 9\,\mathrm{V}$, $U_2 = 12\,\mathrm{V}$, $R_1 = 2{,}4\,\Omega$
$R_2 = 1\,\Omega$, $R_3 = 2\,\Omega$, $R_4 = 3\,\Omega$, $R_5 = 5\,\Omega$




...
**Lösung:**
**Überlagerungsverfahren**
Für die Berechnung des Einflusses der ersten Quelle bestimmen wir zunächst die zusammenhängenden Widerstände

$$R_{25} = \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5} = \frac{5}{6}\,\Omega$$
$$R_{325} = R_3 + R_{25} = \frac{17}{6}\,\Omega$$
$$R_{4325} = \frac{R_4 R_{325}}{R_4 + R_{325}} = \frac{51}{35}\,\Omega$$

Und damit ergibt sich für die Ströme

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{U_1}{R_1 + R_{4325}} = \frac{7}{3}\,\mathrm{A} \\
I_{41} &= I_{11}\frac{R_{325}}{R_{325} + R_4} = \frac{17}{15}\,\mathrm{A} \\
I_{31} &= -I_{11} + I_{41} = -\frac{6}{5}\,\mathrm{A} \\
I_{21} &= I_{31}\frac{R_5}{R_2 + R_5} = -1\,\mathrm{A} \\
I_{51} &= I_{21} - I_{31} = \frac{1}{5}\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

Nach dem Überlagerungsverfahren benötigen wir für den Einfluss der zweiten Quelle zunächst die Zusammenschaltungen der Widerstände 1,4,3,5, es ist

$$
\begin{aligned}
R_{14} &= \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} = \frac{4}{3}\,\Omega \\
R_{134} &= R_{14} + R_3 = \frac{10}{3}\,\Omega \\
R_{1345} &= \frac{R_{134} R_5}{R_{134} + R_5} = 2\,\Omega
\end{aligned}
$$

Und mit $R_2 = 1\,\Omega$ folgt dann für den Einfluss der zweiten Quelle einfach

$$
\begin{aligned}
I_{22} &= \frac{U_2}{R_2 + R_{1345}} = 4\,\mathrm{A} \\
I_{52} &= I_{22}\frac{R_{134}}{R_{134} + R_5} = 1{,}6\,\mathrm{A} \\
I_{32} &= I_{22} - I_{52} = 2{,}4\,\mathrm{A} \\
I_{12} &= -I_{32}\frac{R_4}{R_1 + R_4} = -\frac{4}{3}\,\mathrm{A} \\
I_{42} &= I_{32} + I_{12} = \frac{16}{15}\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

Und zusammengebaut ergibt sich dann für die Gesamtströme

$$
\begin{aligned}
I_1 &= I_{11} + I_{12} = 1\,\mathrm{A} \\
I_2 &= I_{21} + I_{22} = 3\,\mathrm{A} \\
I_3 &= I_{31} + I_{32} = 1{,}2\,\mathrm{A} \\
I_4 &= I_{41} + I_{42} = 2{,}2\,\mathrm{A} \\
I_5 &= I_{51} + I_{52} = 1{,}8\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

Dieser Lösungsweg ist einigermaßen sicher, aber nicht sonderlich effektiv.
**Maschenstromverfahren**

Als weiterer Lösungsweg würde sich hier das Maschenstromverfahren anbieten. Dazu werden die Maschengleichungen für die Ströme $I_1$,$I_2$,$I_3$ als Maschenströme aufgestellt. Das Gleichungssystem ist dann

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_4 & 0 & R_4 \\ 0 & R_2 + R_5 & -R_5 \\ R_4 & -R_5 & R_3 + R_4 + R_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit Zahlenwerten ist dann

$$\begin{pmatrix} 5{,}4 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & -5 \\ 3 & -5 & 10 \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{V}$$

Erstmal normieren (kann man auch anders machen)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} \\ 1 & -\frac{5}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

Subtrahiere erst von letzter Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{25}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 2 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

und normiere die letzte Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} \\ 0 & -1 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

Addiere zweite und dritte Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

Und kann nun rückwärts die Ströme berechnen, wodurch nun

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{\frac{5}{6}} \,\mathrm{A} = 1{,}2\,\mathrm{A} \\ I_2 &= \frac{5}{6} I_3 + 2\,\mathrm{A} = 3\,\mathrm{A} \\ I_1 &= -\frac{5}{9} I_3 + \frac{5}{3}\,\mathrm{A} = 1\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

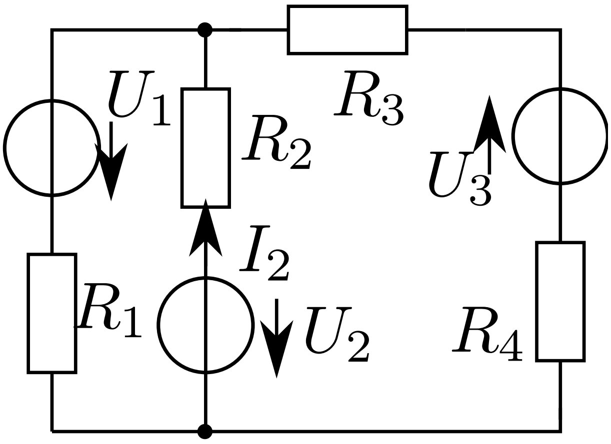
Die fehlenden beiden Ströme ergeben sich leicht durch die Kirchhoff'sche Knotenregel:

$$\begin{aligned} I_4 &= I_1 + I_3 = 2{,}2\,\mathrm{A} \\ I_5 &= I_2 - I_3 = 1{,}8\,\mathrm{A}. \end{aligned}$$

Natürlich erhält man mit beiden Verfahren das gleiche Ergebnis...

## 6.2 Überlagerungsverfahren

Berechnen Sie mit dem Überlagerungsverfahren den Strom $I_2$ durch den Widerstand $R_2$ für die dargestellte Schaltung




...

**Lösung:** es ergeben sich die einzelnen Anteile

$$\begin{aligned}
I_{21} &= U_1 \frac{-1}{R_1 + \frac{R_2(R_3+R_4)}{R_2+R_3+R_4}} \times \frac{R_3+R_4}{R_2+R_3+R_4} \\
&= \frac{-U_1(R_3+R_4)}{R_1(R_2+R_3+R_4)+R_2(R_3+R_4)} \\
I_{22} &= U_2 \frac{1}{R_2 + \frac{R_1(R_3+R_4)}{R_1+R_3+R_4}} \\
&= \frac{U_2(R_1+R_3+R_4)}{R_1R_2+R_1R_3+R_1R_4+R_2R_3+R_2R_4)}
\end{aligned}$$

$I_{23}$ ist wie $I_{21}$, jedoch sind $(R_3+R_4) \leftrightarrow R_1$ und $-U_1 \leftrightarrow U_3$ zu tauschen

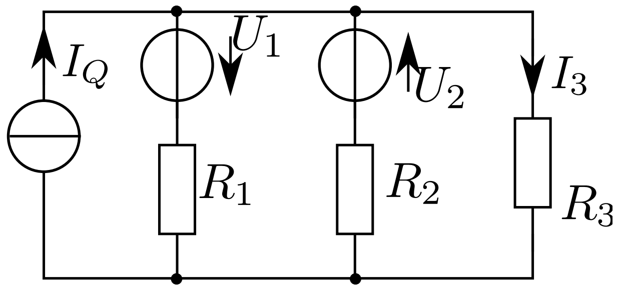
$$I_{23} = \frac{U_3R_1}{R_1R_2+R_1R_3+R_1R_4+R_2R_3+R_2R_4}$$

Das Endergebnis ist die Summe aller Anteile, also

$$\begin{aligned}
I_2 &= I_{21} + I_{22} + I_{23} \\
&= \frac{-U_1(R_3+R_4)+U_2(R_1+R_3+R_4)+U_3R_1}{R_1R_2+R_1R_3+R_1R_4+R_2R_3+R_2R_4}.
\end{aligned}$$

## 6.3 Maschenstromanalyse

Berechnen Sie den Strom $I_3$ durch den Widerstand $R_3$ nach der Maschenstromanalyse. Hier sind $R_1 = 1\,\Omega; R_2 = 2\,\Omega; R_3 = 3\,\Omega; U_1 = 1\,\mathrm{V}; U_2 = 2\,\mathrm{V}; I_Q = 3\,\mathrm{A}$




...

**Lösung:** Die Maschen werden für jedes "Rechteck" einzeln angesetzt, wobei in der linken Masche der schon bekannte Strom $I_Q$ fließt. Hilfreich ist es hierbei, den gesuchten Strom in die letzte Spalte zu schreiben, dann wird dieser als erster berechnet, das spart Arbeit.

$$\begin{pmatrix} R_1 & -R_1 & 0 \\ -R_1 & R_1+R_2 & -R_2 \\ 0 & -R_2 & R_2+R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_Q \\ I_1 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_1 \\ U_1+U_2 \\ -U_2 \end{pmatrix}$$

Mit dem bekannten $I_Q$ kann die Zeile weggelassen werden und der entsprechende Eintrag wird auf die rechte Seite gebracht.

$$\begin{pmatrix} R_1+R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2+R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1+U_2+I_Q R_1 \\ -U_2 \end{pmatrix}$$

Es werden dann die Zeilen auf den ersten Eintrag normiert und die erste von der zweiten Zeile subtrahiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{R_2}{R_1+R_2} \\ 0 & \frac{R_2+R_3}{R_2} - \frac{R_2}{R_1+R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_1+U_2+I_Q R_1}{R_1+R_2} \\ -\frac{U_2}{R_2} + \frac{U_1+U_2+I_Q R_1}{R_1+R_2} \end{pmatrix}$$

Und aus der letzten Zeile folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_2(R_1+R_2)} I_3 &= \frac{-U_2(R_1+R_2)+U_1R_2+U_2R_2+I_QR_1R_2}{R_2(R_1+R_2)} \\ \Leftrightarrow I_3 &= \frac{-U_2R_1+U_1R_2+I_QR_1R_2}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}. \end{aligned}$$

Mit den Zahlenwerten ergibt sich das Gleichungssystem zu

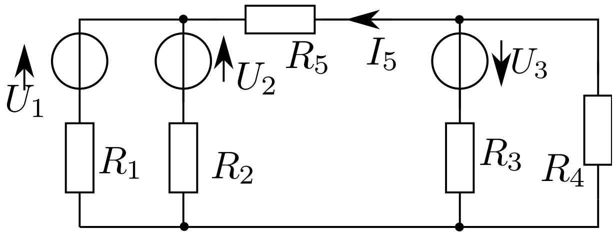
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

und damit $I_1 = 2{,}3636\,\mathrm{A}$ und $I_3 = 545{,}45\,\mathrm{mA}$.

## 6.4 Maschenstromanalyse

(a) Bestimmen Sie den Strom $I_5$ durch $R_5$ mit Hilfe der Maschenstromanalyse. Die Elementwerte sind $R_1 = R_2 = 1\,\Omega$; $R_3 = 2\,\Omega$; $R_4 = 10\,\Omega$; $R_5 = 2\,\Omega$; $U_1 = U_2 = 1{,}5000\,\mathrm{V}$; $U_3 = 2\,\mathrm{V}$.

(b) Wie verändert sich das Gleichungssystem, wenn parallel zu $R_4$ eine Stromquelle mit dem Quellstrom $I_Q$ wirkt?




...

**Lösung:** Es werden die offensichtlichen, kleinen Maschen gewählt und $I_5$ wird als gesuchter Strom wieder in die letzte Zeile geschrieben.

$$\begin{pmatrix} R_1+R_2 & 0 & -R_2 \\ 0 & R_3+R_4 & R_3 \\ -R_2 & R_3 & R_2+R_3+R_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1-U_2 \\ U_3 \\ U_2+U_3 \end{pmatrix}$$

Normieren der ersten Spalten und danach eliminieren der Elemente in der ersten Spalte

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{R_2}{R_1+R_2} \\ 0 & 1 & \frac{R_3}{R_3+R_4} \\ 0 & R_3 & R_2+R_3+R_5-\frac{R_2^2}{R_1+R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_1-U_2}{R_1+R_2} \\ \frac{U_3}{R_3+R_4} \\ U_2+U_3+\frac{U_1-U_2}{R_1+R_2}R_2 \end{pmatrix}$$

Aus den letzten Beiden Zeilen folgt dann

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{R_3}{R_3+R_4} \\ 1 & \frac{R_1R_2+R_1R_3+R_1R_5+R_2R_3+R_2R_5}{R_3(R_1+R_2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_3}{R_3+R_4} \\ \frac{U_2R_1+U_1R_2+U_3(R_1+R_2)}{R_3(R_1+R_2)} \end{pmatrix}$$

Und dann bleibt nach passender Subtraktion in der letzten Zeile

$$\left(\frac{R_1R_2+R_1R_3+R_1R_5+R_2R_3+R_2R_5}{R_3(R_1+R_2)} - \frac{R_3}{R_3+R_4}\right) I_5 = \frac{U_2R_1+U_1R_2+U_3(R_1+R_2)}{R_3(R_1+R_2)} - \frac{U_3}{R_3+R_4}$$

und damit dann

$$I_5 = \frac{(U_2R_1+U_1R_2)(R_3+R_4)+U_3(R_1+R_2)R_4}{(R_1R_2+R_1R_3+R_1R_5+R_2R_3+R_2R_5)(R_3+R_4)-R_3^2(R_1+R_2)}$$

Mit Zahlenwerten folgt dann

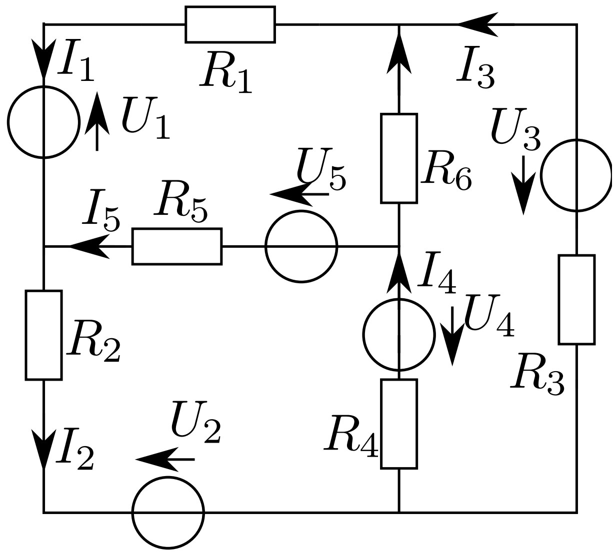
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 12 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} \text{A}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_1 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 \\ 40 \\ 760 \end{pmatrix} \text{mA}$$

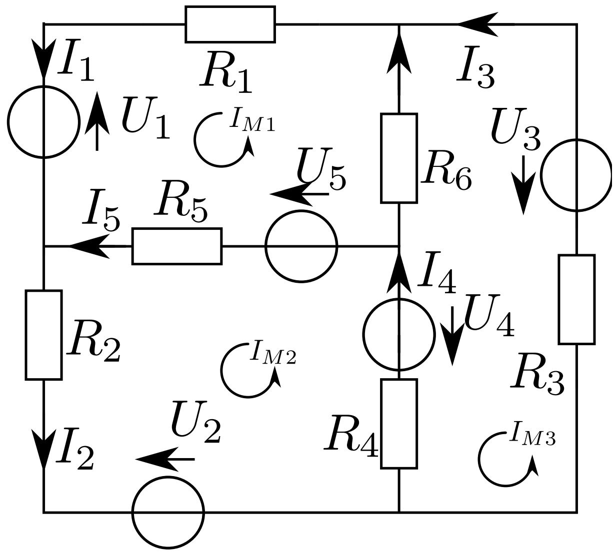
Wenn parallel zu $R_4$ noch eine Stromquelle mit $I_Q$ liegt, dann wird in der zweiten Zeile die rechte Seite zu $U_3 + I_Q R_4$ geändert.
Ggf. würde sich bei dieser Schaltung eine Lösung mit dem Knotenpotenzialverfahren anbieten.

## 6.5 Maschenstromanalyse

In der u.g. Schaltung betragen $U_1 = 10\,\mathrm{V}$, $U_2 = 50\,\mathrm{V}$ und $U_3 = U_4 = U_5 = 20\,\mathrm{V}$ und alle Widerstände $R = 10\,\Omega$. Bestimmen Sie alle Zweigströme mit Hilfe der Maschenstromanalyse!




...
**Lösung:**




Die Maschen werden wie gezeigt aufgestellt und es ist $I_1 = I_{M1}$, $I_2 = I_{M2}$, $I_3 = I_{M3}$.

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_5 + R_6 & -R_5 & -R_6 \\ -R_5 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_4 \\ -R_6 & -R_4 & R_3 + R_4 + R_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 + U_5 \\ U_2 + U_4 - U_5 \\ U_3 - U_4 \end{pmatrix}$$

Mit den eingesetzten werte, und passend gekürzt folgt dann

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ A}$$

Addition der normierten ersten Spalte mit den beiden anderen ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ A}$$

Und nun nur noch die letzten beiden Spalten bearbeitend folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \text{ A}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9}{2} \\ \frac{12}{4} \end{pmatrix} \text{ A}$$

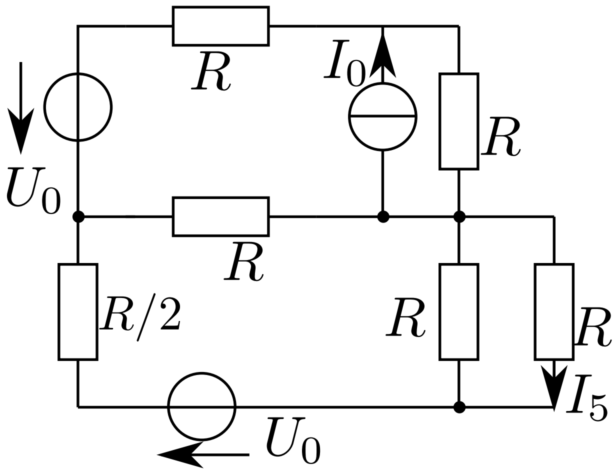
womit dann

$$\begin{aligned} I_3 &= 2\,\text{A} \\ I_2 &= \left(\frac{9}{2} + 2\right)\frac{1}{2}\,\text{A} = 3{,}25\,\text{A} \\ I_1 &= \left(1\,\text{A} + \frac{1}{3}I_2 + \frac{1}{3}I_3\right) = \left(1 + \frac{13}{12} + \frac{2}{3}\right)\text{A} = 2{,}75\,\text{A} \end{aligned}$$

als Endergebnis entsteht. Und weiter ist

$$\begin{aligned} I_4 &= I_2 - I_3 = 1{,}25\,\text{A}, \\ I_5 &= I_2 - I_1 = 0{,}5\,\text{A}, \\ I_6 &= I_1 - I_3 = 0{,}75\,\text{A}. \end{aligned}$$

## 6.6 Kirchhoff'sche Regeln (13 Punkte)




(a) Berechnen Sie den Strom $I_5$ an eingezeichneter Stelle nach dem Überlagerungsverfahren (Fassen Sie vor Anwendung dessen KEINE Quellen zusammen, geben Sie alle Strombeiträge an!) (4 Punkte)
**Lösung:**

**Bemerkung: In der Originalklausur war der Richtungssinn der unteren Quelle umgedreht, es ergeben sich daher abweichende Ergebnisse**

Einfluss von Quelle 1 (oben links):

Hier ist der Gesamtwiderstand

$$R_1 = (R||R + \frac{R}{2})||R + 2R = \frac{5}{2}R$$

Es fließt dann der Strom

$$I_1 = \frac{2}{5} \times \frac{U}{R}$$

und der Strom

$$I_{51} = \frac{I_1}{4} = \frac{1}{10} \times \frac{U}{R}$$

Einfluss der Stromquelle ist fast genau das gleiche, man könnte die ja in eine Spannungsquelle mit $U_{LL} = I_0 R$ umwandeln und dann hat man

$$I_{52} = -\frac{1}{10} \times I_0$$

Bleibt noch die Quelle unten. Aus deren Sicht ist der Gesamtwiderstand der Schaltung

$$R_3 = R + 2R||R = R + \frac{2}{3}R = \frac{5}{3}R$$

Es fließt also der Strom

$$I_3 = \frac{3}{5} \times \frac{U}{R}$$

und damit der Strom

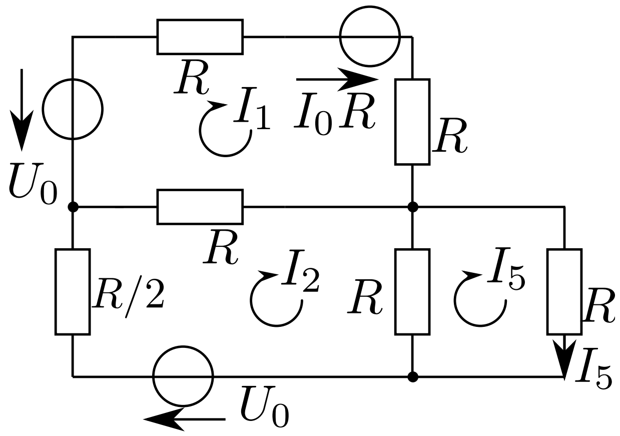
$$I_{53} = -\frac{3}{10} \times \frac{U}{R}$$

Am Ende hat man dann

$$I_5 = I_{51} + I_{52} + I_{53} = -\frac{2}{10} \times \frac{U}{R} - \frac{1}{10} \times I_0$$

**(Für jeden Teilstrom und das Endergebnis je 1 Punkt)**

(b) Stellen Sie die Matrix für die Maschenstromanalyse auf, wandeln Sie dazu ggf. Quellen in die besser geeignete Form vorher um. Achten Sie darauf, dass $I_5$ nach Lösung des Gleichungssystems direkt zur Verfügung steht! (4 Punkte)
**Lösung:** Zuerst wird die Stromquelle in eine äquivalente Spannungsquelle umgewandelt und es bleiben dann drei Maschen




und es ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3R & -R & 0 \\ -R & 2{,}5R & -R \\ 0 & -R & 2R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 - I_0R \\ -U_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**(4 Punkte für Matrix etc.)**

(c) Wenn Sie ihrem obigen Ergebnis nicht vertrauen, dann lösen Sie hier das GLS, ansonsten fahren Sie mit der nächsten Teilaufgabe fort. Es gibt hier keine Punkte, aber falsche Ergebnisse weiter unten werden auch nicht als Folgefehler gewertet!
**Lösung:** Das Gleichungssystem kann gelöst

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 2{,}5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} R \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_0 - I_0R}{3} \\ -U_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{13}{6} & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} R \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_0 - I_0 R}{3} \\ -\frac{2}{3}U_0 - \frac{I_0 R}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{13} \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} R \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_0 - I_0 R}{3} \\ -\frac{4}{13}U_0 - \frac{2 I_0 R}{13} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{13} \\ 0 & 0 & \frac{20}{13} \end{pmatrix} R \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_0 - I_0 R}{3} \\ -\frac{4}{13}U_0 - \frac{2 I_0 R}{13} \\ -\frac{4}{13}U_0 - \frac{2 I_0 R}{13} \end{pmatrix}$$

Und damit ist das Endergebnis

$$I_5 = -\frac{2}{10} \times \frac{U_0}{R} - \frac{I_0}{10}$$

(d) Wie muss $I_0$ eingestellt werden, wenn die obere Masche keinen Einfluss auf den Strom $I_5$ haben soll (d.h. im oberen Widerstand kein Strom fließt)? Begründen Sie Ihre Wahl mit Rechnung oder einem vollständigen Satz! (1 Punkt)
**Lösung:**

Dazu muss die obere Masche, bspw. im oberen Widerstand $R$ stromlos sein, dann ist die Masche komplett abgekoppelt, aber es fließt natürlich immer noch ein Strom durch den gemeinsamen Widerstand beider Maschen. Insgesamt fließt oben (durch die beiden Quellen in der betrachteten Masche)

$$I_{11} = \frac{2(U_0 - I_0 R)}{5R}$$

Die untere Quelle lässt zunächst aus der unteren Quelle heraus einen Strom von

$$I_u = \frac{U_0}{\frac{5}{3}R} = \frac{3}{5} \times \frac{U_0}{R}$$

fließen, der sich dann oben in den Strom

$$I_{12} = -\frac{3}{5} \times \frac{U_0}{R} \times \frac{R}{3R} = -\frac{U_0}{5R}$$

aufteilt.

$I_0$ ist nun mittels obigen Zusammenhängen so einzustellen, dass $I_{12} + I_{11} = 0$ wird:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2(U_0 - I_0 R)}{5R} - \frac{U_0}{5R} \\ \Leftrightarrow U_0 - 2I_0 R &= 0 \\ \Leftrightarrow I_0 &= \frac{U_0}{2R} \end{aligned}$$

**(1 Punkt)**

(e) Wie groß ist dann der Spannungsabfall über dem Widerstand, durch den $I_5$ fließt? (1 Punkt)
**Lösung:** Es spielt ja nur noch die untere Spannungsquelle eine Rolle, daher sorgt die alleine für einen Spannungsabfall von

$$U_5 = U_0 \frac{R/2}{2R} = \frac{U_0}{4}$$

**(1 Punkt)**

Bzw., wer mit der ungenauen Argumentation oben gearbeitet hat und dann in die Formel für $I_5$ einsetzte erhielt:

$$I_5 = -\frac{3}{10} \times \frac{U_0}{R}.$$

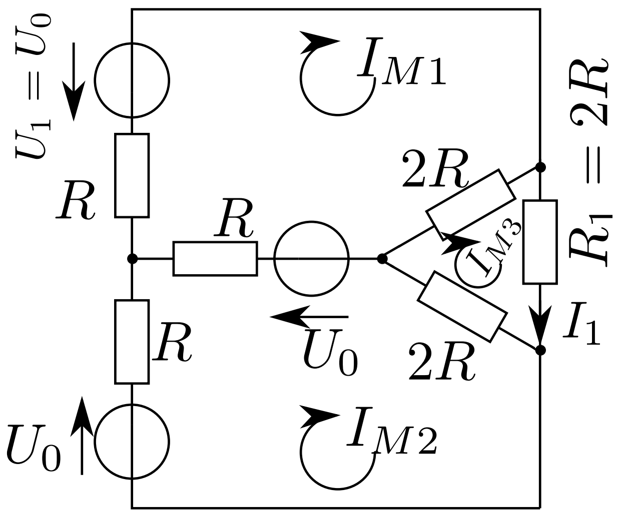
(f) Stellen Sie nun $I_0$ so ein, dass $I_5 = 0$ wird, geben Sie dann die Leistungsumsätze in den einzelnen Widerständen an! (3 Punkte)
**Lösung:** Nach obigen Rechnungen folgt

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{2}{10} \times \frac{U_0}{R} - \frac{I_0}{10} \\ \Leftrightarrow I_0 &= -2\frac{U_0}{R} \end{aligned}$$

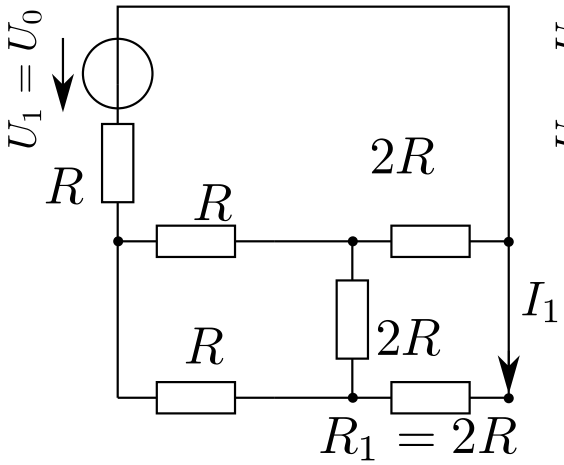
**(1 Punkt)** Die Leistungsumsätze sind dann:

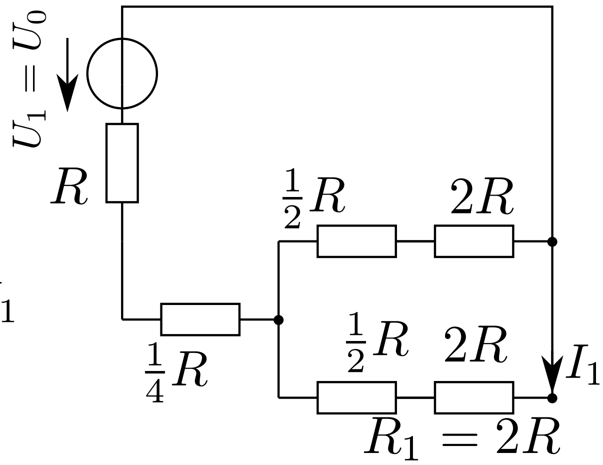
In den Widerständen des unteren Teiles (ohne den mittleren) liegt kein Leistungsumsatz vor, weil stromlos, in jedem der oberen Widerstände ist dann der gleiche Leistungsumsatz vorhanden, und der ist jeweils $P = U_0^2/R$. **(2 Punkte)**

## 6.7 Maschen, Überlagerung oder Dreieck und Stern? (16 Punkte)




(a) Berechnen Sie den Strom $I_1$ durch den Widerstand $R_1$ (wie eingezeichnet), wenn nur die Spannungsquelle $U_1$ aktiv ist und die beiden anderen ausgeschaltet sind! (4 Punkte)
**Lösung:** Wenn zwei Quellen abgeschaltet werden, dann ergibt sich das folgende Schaltbild:




**Variante 1 (Erkennen!)**

Der $2R$-Widerstand im Dreieck unten links liegt auf beiden Sieten auf gleichem Potenzial und ist damit strom und spannungslos. Somit kann er weggelassen werden. Damit ist der Gesamtwiderstand der Konfiguration aus Sicht der Quelle $U_1$

$$R_{ges} = R + (2R + R)||(2R + R) = \frac{5}{2}R$$

Der Gesamtstrom ist also

$$I_{ges} = \frac{2}{5} \times \frac{U_0}{R}$$

und die symmetrische Anordnung teilt den Strom gleichmäßig in beide Arme auf, womit

$$I_1 = \frac{1}{5} \times \frac{U_0}{R}$$

folgt.

**Variante 2 (Stern-Dreieck)**

Bei diesem wurde schon die Dreiecks-Sternumwandung des Dreiecks aus $R$,$R$,$2R$ mit

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{31}+R_{32}} = \frac{1}{2}R \\ R_2 &= \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{31}+R_{32}} = \frac{1}{2}R \\ R_3 &= \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{31}+R_{32}} = \frac{1}{4}R \end{aligned}$$

vorgenommen.

Damit ist der Strom $I_1$ leicht zu berechnen. Der gesamte Widerstand, den die Quelle sieht ist

$$R_{ges} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2}R + \frac{1}{4}R + R = \frac{5}{2}R$$

und es fließt demnach der gesamte Strom

$$I_{ges} = \frac{U_{ges}}{R_{ges}} = \frac{2}{5}\frac{U_0}{R},$$

der sich auf beide parallelen Zweige mit

$$I_1 = \frac{1}{5}\frac{U_0}{R}$$

gleichmäßig aufteilt.

**Variante 3 (Standardverfahren)**

Wie weiter unten noch gezeigt, kann die Aufgabe auch bspw. mittels Maschenstromverfahren gelöst werden.

(b) Bestimmen Sie den Strom $I_1$ wenn nun alle Spannungsquellen aktiv sind. Verwenden Sie den Überlagerungssatz (ggf. Stern-Dreicksumformung) und oder präzise erläuterte Symmetrieargumente! (2 Punkte)

**Lösung:** Die untere Quelle (Überlagerungssatz) erzeugt betragsmäßig den gleichen Strom, allerdings entgegengesetzt, so dass sich der Einfluss der oberen und der unteren Quelle gegenseitig aufheben.

Die rechte Quelle wird nach oben und unten vollkommen symmetrisch belastet. Der Strom teilt sich im Dreieck also nach oben und unten gleich auf. Damit sieht $R_1$ am unteren und oberen Anschluss das gleiche Potenzial, es fließt hierdurch kein Strom.

In der Summe fließt also kein Strom durch $R_1$.

**Bewertung. 2 Punkte für Ergebnis und saubere Argumentation.**

(c) Stellen Sie die Matrix für die Maschenstromanalyse auf, wandeln Sie dazu ggf. Quellen in die besser geeignete Form vorher um. Achten Sie darauf, dass $I_{M3}$ nach Lösung des Gleichungssystems direkt zur Verfügung steht! (4 Punkte)
**Lösung:**

Es ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4R & -R & -2R \\ -R & 4R & -2R \\ -2R & -2R & 6R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**(4 Punkte für Matrix etc.)**

(d) Berechnen Sie die Maschenströme, wenn wiederum nur $U_1$ aktiv ist und die beiden anderen Quellen ausgeschaltet sind! (3 Punkte)
**Lösung:** Das Gleichungssystem kann gelöst werden in folgenden Schritten:

$$\begin{pmatrix} 4R & -R & -2R \\ -R & 4R & -2R \\ -2R & -2R & 6R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4R & -R & -2R \\ 0 & \frac{15}{4}R & -\frac{5}{2}R \\ 0 & -\frac{5}{2}R & 5R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ \frac{1}{4}U_0 \\ \frac{1}{2}U_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4R & -R & -2R \\ 0 & 3R & -2R \\ 0 & -5R & 10R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ \frac{1}{5}U_0 \\ U_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4R & -R & -2R \\ 0 & 3R & -2R \\ 0 & 0 & \frac{20}{3}R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ \frac{1}{5}U_0 \\ \frac{4}{3}U_0 \end{pmatrix}$$

Damit ist dann sofort und mit Rückwärts einsetzen:

$$I_{M1} = \frac{2}{5} \times \frac{U_0}{R}$$
$$I_{M2} = \frac{1}{5} \times \frac{U_0}{R}$$
$$I_{M3} = \frac{1}{5} \times \frac{U_0}{R}$$

**Bewertung: für jeden Maschenstrom 1 Punkt, also 3 Punkte**

(e) Bestimmen Sie die Ströme durch alle Widerstände unter vorgenannter Bedingung! (3 Punkte)

**Lösung:** Erstmal die $2R$-Widerstände, da sind das

$$
\begin{aligned}
I_1 &= I_{M3} = \frac{1}{5} \times \frac{U_0}{R} \\
I_2 &= I_{M1} - I_{M3} = \frac{1}{5} \times \frac{U_0}{R} \\
I_3 &= I_{M2} - I_{M3} = 0
\end{aligned}
$$

Und dann noch die Sternwiderstände (oben, rechts, unten)

$$
\begin{aligned}
I_o &= I_{M1} = \frac{2}{5} \times \frac{U_0}{R} \\
I_r &= I_{M1} - I_{M2} = \frac{1}{5} \times \frac{U_0}{R} \\
I_u &= I_{M2} = \frac{1}{5} \times \frac{U_0}{R}
\end{aligned}
$$

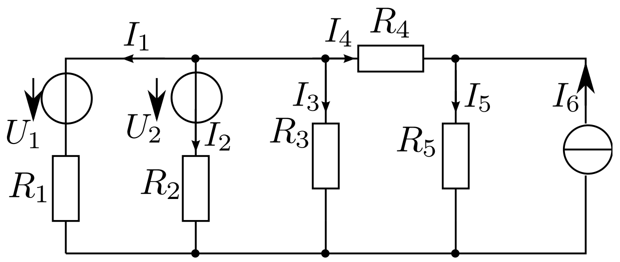
.

**Bewertung. Für jeden richtigen Wert 0,5 Punkte, also zusammen 3 Punkte**

# 7 Knotenpotenzialverfahren

## 7.1 Knotenpotenzialverfahren

Die im Bild dargestellte Schaltung enthält zwei Spannungsquellen mit den Spannungen $U_1 = 40\,\mathrm{V}$ und $U_2 = 60\,\mathrm{V}$ sowie eine Stromquelle, die den Strom $I_6 = 1{,}2\,\mathrm{A}$ liefert. Die Widerstände haben die Werte $R_1 = R_3 = R_5 = 50\,\Omega$ und $R_2 = R_4 = 40\,\Omega$. Bestimmen Sie alle Zweigstöme mit Hilfe des Knotenspannungsverfahrens.




...

**Lösung:** Die Schaltung hat drei Knoten, ich wähle 1: links von $R_4$, 2: rechts von $R_4$ und 0 die untere Verbindung. Dann ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 + G_3 + G_4 & -G_4 \\ -G_4 & G_4 + G_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 G_1 + U_2 G_2 \\ I_6 \end{pmatrix}$$

und mit den Werten $G_1 = G_2 = 25\,\mathrm{mS}$ und $G_1 = G_3 = G_5 = 20\,\mathrm{mS}$ sowie $U_1 G_1 = 0{,}8\,\mathrm{A}$, $U_2 G_2 = 1{,}5\,\mathrm{A}$ und natürlich $I_6 = 1{,}2\,\mathrm{A}$ wird die Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 90 & -25 \\ -25 & 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2300 \\ 1200 \end{pmatrix} \mathrm{V}$$

und dann der Lösungsweg über

$$\begin{pmatrix} 1 & -0{,}2778 \\ -1 & 1{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25{,}56 \\ 48 \end{pmatrix} \mathrm{V}$$

zu derletzten Zeile

$$1{,}522 \times U_{20} = 73{,}56\,\mathrm{V}$$

und schließlich

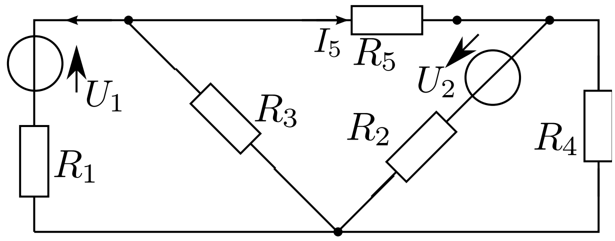
$$U_{20} = 48{,}32\,\mathrm{V}$$
$$U_{10} = 38{,}98\,\mathrm{V}.$$

Die einzelnen Ströme sind dann

$$I_4 = -G_4(U_{20} - U_{10}) = -233{,}5\,\mathrm{mA}, \qquad I_3 = G_3 U_{10} = 779{,}6\,\mathrm{mA},$$
$$I_5 = G_5 U_{20} = 966{,}4\,\mathrm{mA}, \qquad I_1 = G_1(U_{10} - U_1) = -20{,}4\,\mathrm{mA},$$
$$I_2 = G_2(U_{10} - U_2) = -525\,\mathrm{mA}.$$

## 7.2 Knotenpotenzialverfahren

Berechnen Sie mit Hilfe der Knotenspannungsanalyse den Strom $I_5$ durch $R_5$ der Schaltung! Sie können das Ergebnis vereinfachend mit Hilfe der Leitwerte $G_i = 1/R_i$ angeben.




...

**Lösung:** mit der Abkürzung $G_i = 1/R_i$ ist das Gleichungssystem für die Knotenwahl 1: links von $R_5$, 0: rechts von $R_5$ und 2 unten

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_3 + G_5 & -G_1 - G_3 \\ -G_1 - G_3 & G_1 + G_2 + G_3 + G_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_1 G_1 \\ U_1 G_1 - U_2 G_2 \end{pmatrix}$$

Die Knoten wurden so gewählt, damit eine Spannung dieses Verfahrens direkt über dem interessierenden Zweig abfällt.
Das Gleichungssystem muss nun für $U_{10}$ und nur dafür gelöst werden. Dazu verwende ich nun die Cramer'sche Regel. Die Determinante der kompletten Matrix ist:

$$D_A = (G_1 + G_3 + G_5)(G_1 + G_2 + G_3 + G_4) - (G_1 + G_3)^2$$

und die Determinante, in der die erste Spalte mit der rechten Seite ersetzt wurde ist

$$D_1 = -U_1 G_1 (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) + (U_1 G_1 - U_2 G_2)(G_1 + G_3).$$

Das Ergebnis ist dann der Quotient aus beidem, also

$$U_{10} = \frac{D_1}{D_A} = \frac{-U_1 G_1 (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) + (U_1 G_1 - U_2 G_2)(G_1 + G_3)}{(G_1 + G_3 + G_5)(G_1 + G_2 + G_3 + G_4) - (G_1 + G_3)^2}$$

und mit

$$I_5 = U_{10} G_5 = G_5 \times \frac{-U_1 G_1 (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) + (U_1 G_1 - U_2 G_2)(G_1 + G_3)}{(G_1 + G_3 + G_5)(G_1 + G_2 + G_3 + G_4) - (G_1 + G_3)^2}.$$

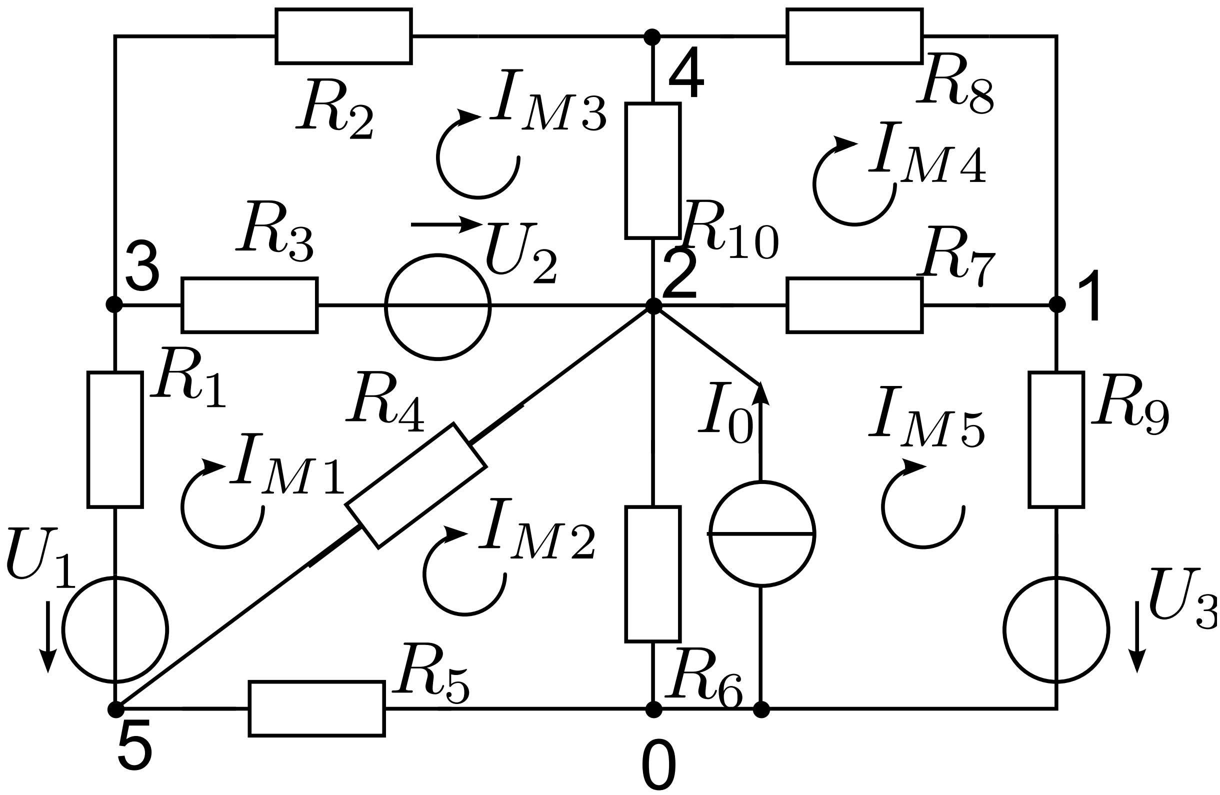
## 7.3 Vergleich der Verfahren

Bestimmen Sie für die dargestellte Schaltung das Gleichungssystem in Matrizenschreibweise. Verwenden Sie hierfür

(a) das Zweigstromanalyseverfahren,

(b) das Maschenstromverfahren (nutzen Sie die eingezeichneten Maschenströme)

(c) das Knotenspannungsverfahren für die angegebenen Knoten!




...

**Lösung:** Nach dem Zweigstromverfahren ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & R_5 & -R_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_7 & R_8 & 0 & -R_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 & -R_7 & 0 & R_9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \\ I_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -I_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_1 - U_2 \\ 0 \\ U_2 \\ 0 \\ -U_3 \end{pmatrix}$$

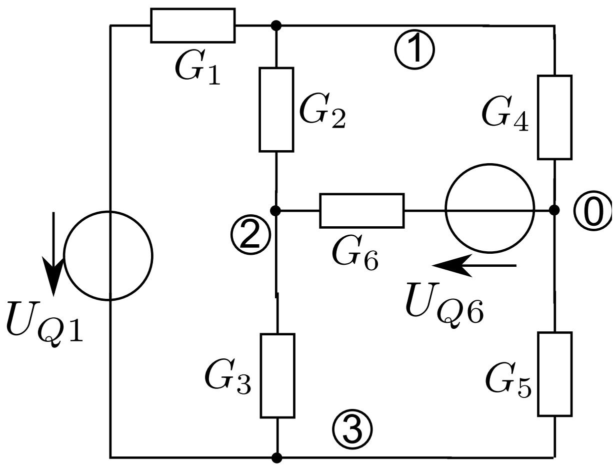
Im Maschenstromverfahren hat man dann

$$\begin{pmatrix} R_1+R_3+R_4 & -R_4 & -R_3 & 0 & 0 \\ -R_4 & R_4+R_5+R_6 & 0 & 0 & -R_6 \\ -R_3 & 0 & R_2+R_3+R_{10} & -R_{10} & 0 \\ 0 & 0 & -R_{10} & R_7+R_8+R_{10} & -R_7 \\ 0 & -R_6 & 0 & -R_7 & R_6+R_7+R_9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \\ I_{M4} \\ I_{M5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_2+U_1 \\ -I_0R_6 \\ U_2 \\ 0 \\ I_0R_6-U_3 \end{pmatrix}$$

Und schließlich noch in der Knotenspannungsanalyse

$$\begin{pmatrix} G_7+G_8+G_9 & -G_7 & 0 & -G_8 & 0 \\ -G_7 & G_3+G_4+G_6+G_7+G_{10} & -G_3 & -G_{10} & -G_4 \\ 0 & -G_3 & G_1+G_2+G_3 & -G_2 & -G_1 \\ -G_8 & -G_{10} & -G_2 & G_2+G_8+G_{10} & 0 \\ 0 & -G_4 & -G_1 & 0 & G_1+G_4+G_5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \\ U_{40} \\ U_{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_3G_9 \\ I_0-U_2G_3 \\ U_2G_3+U_1G_1 \\ 0 \\ -U_1G_1 \end{pmatrix}$$

### 7.4 Kirchhoff'sche Regeln (14 Punkte)




(a) Geben Sie für die o.g. Schaltung das Gleichungssystem an, das bei der Knotenspannungsanalyse entsteht. Vor Aufstellung formen Sie die Quellen ggf. in die jeweils geeignetste Form (Strom- oder Spannungsquelle) um!
**Lösung:** Die Spannungsquellen müssen in Stromquellen umgewandelt werden, so dass

man

$$I_{Q1} = G_1 \times U_{Q1}$$
$$I_{Q6} = G_6 \times U_{Q6}$$

erhält.

Es ergibt sich auf einfachem Wege das folgende GLS:

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 + G_4 & -G_2 & -G_1 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_6 & -G_3 \\ -G_1 & -G_3 & G_1 + G_3 + G_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ U_{K3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{Q1}G_1 \\ -U_{Q6}G_6 \\ -U_{Q1}G_1 \end{pmatrix}$$

**Bewertung: (5) Punkte insgesamt, Teilpunkte werden für einzelne richtige Matrix-Einträge und die Umwandlung der Spannungsquellen in Stromquellen gegeben**

(b) Für die Werte der Leitwerte und der Quellen gilt $G_2 = G_4 = 1\,\mathrm{mS}$, $G_1 = 10\,\mathrm{mS}$, $G_3 = G_5 = 2\,\mathrm{mS}$, $G_6 = 10\,\mathrm{mS}$, $U_{Q1} = 100\,\mathrm{V}$ und $U_{Q6} = 10\,\mathrm{V}$. Berechnen Sie alle Knotenspannungen.
**Lösung:** Einsetzen der Zahlenwerte in das GLS ergibt:

$$\begin{pmatrix} 12 & -1 & -10 \\ -1 & 13 & -2 \\ -10 & -2 & 14 \end{pmatrix} \mathrm{mS} \begin{pmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ U_{K3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000\,\mathrm{mA} \\ -100\,\mathrm{mA} \\ -1000\,\mathrm{mA} \end{pmatrix}$$

nun wird das Gleichungssystem gelöst und wir erhalten:

$$\begin{aligned} U_{K1} &= 54{,}48\,\mathrm{V} \\ U_{K2} &= -8{,}70\,\mathrm{V} \\ U_{K3} &= -33{,}76\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

**Bewertung: (5) Punkte, jeweils (2) Punkte für den Weg und (3) Punkte die richtigen Knotenspannungen**

(c) Berechnen Sie alle Zweigströme als Funktion der Knotenspannungen und berechnen Sie die Zweigströme dann!
**Lösung:** Die Ströme ergeben sich wie folgt:

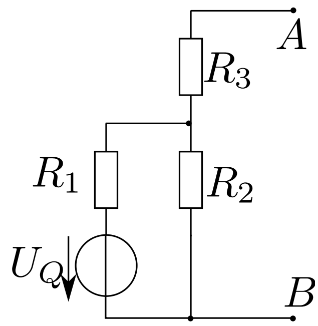
$$\begin{aligned} I_{Z1} &= (U_{K1} - U_{K3} - U_{Q1})G_1 = 118\,\mathrm{mA} \\ I_{Z2} &= (U_{K1} - U_{K2})G_2 = 63\,\mathrm{mA} \\ I_{Z3} &= (U_{K3} - U_{K2})G_3 = 50\,\mathrm{mA} \\ I_{Z4} &= U_{K1}G_4 = 54\,\mathrm{mA} \\ I_{Z5} &= U_{K3}G_5 = 68\,\mathrm{mA} \\ I_{Z6} &= (U_{K2} + U_{Q6})G_6 = 13\,\mathrm{mA} \end{aligned}$$

**Bewertung: (3) Punkte, je (0,5) für jeden der Zweigströme**

(d) Geben Sie den Strom durch $G_6$ an, wenn die Spannungsquelle mit $U_{Q6} = 0$ abgeschaltet wird!
**Lösung:** Das ist die abgeglichene Brücke, damit ist dann natürlich $I_6 = 0$ **Bewertung: (1) Punkt**

# 8 Zweipoltheorie

## 8.1 Einfacher Zweipol




Berechnen Sie für den dargestellten aktiven Zweipol

(a) das Spannungsquellen-Ersatzschaltbild
**Lösung:** Das ist einfach eine Spannungsquelle mit der Leerlaufspannung

$$U_{LL} = U_Q \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

und dem Innenwiderstand

$$R_I = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2}$$

in Reihe dazu.

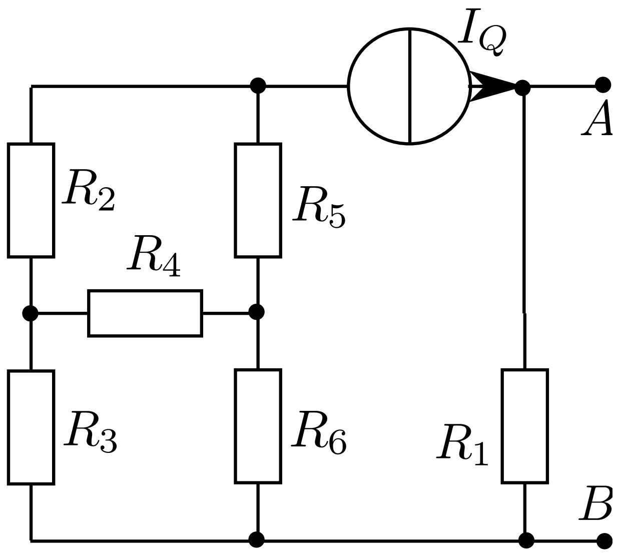
(b) das Stromquellen-Ersatzschaltbild
**Lösung:** Der Kurzschlusstrom, den die ideale Stromquelle liefert ist der Strom, der bei Kurzschluss von A-B durch $R_3$ fließt, also

$$I_{KS} = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$
$$I_1 = \frac{U_Q}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{U_Q (R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$
$$\Rightarrow I_{KS} = U_Q \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Der Innenwiderstand, der parallel dazu liegt, ist der gleiche wie in (a). Natürlich hätte man den Kurzschlussstrom auch aus dem Ergebnis von (a) mit $I_{KS} = U_Q / R_I$ berechnen können.

## 8.2 Zweipol

Berechnen Sie für den dargestellten Zweipol AB

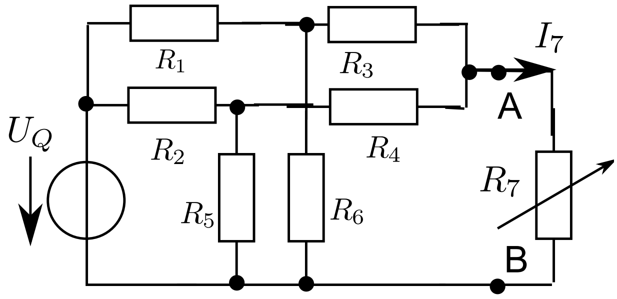



(a) Das Spannungsquellen-Ersatzschaltbild
**Lösung:** Die Schaltung aus den Widerständen 2 bis 6 liegt in Reihe zu einer idealen Stromquelle und hat daher keine Auswirkung auf den Zweipol. Die Ersatzquelle hat also eine Spannungsquelle mit $U_Q = I_Q R_1$ mit einem Innenwiderstand $R_I = R_1$ in Reihe damit.

(b) Das Stromquellen-Ersatzschaltbild
**Lösung:** Ist einfach die o.g. Schaltung ohne Widerstände 2 bis 6, also $I_Q$ parallel zu $R_1$

### 8.3 Leistungsmaximierung

Die gezeigte Schaltung mit den Widerständen $R_1 = R_3 = R_4 = R_5 = 3\,\Omega$ und $R_2 = R_6 = 6\,\Omega$ sowie dem veränderbaren Widerstand $R_7$ liegt an der Spannnung $U_Q = 15\,\mathrm{V}$.




(a) Auf welchen Wert ist $R_7$ einzustellen, damit dieser die maximal mögliche Leistung aufnimmt?
**Lösung:** Zunächst wird der Innenwiderstand der Quelle bestimmt, und das reicht auch schon zur Beantwortung dieses Aufgabenteils. Wenn die Spannungsquelle durch einen Kurzschluss ersetzt wird, liegt $R_1$ parallel zu $R_6$ an Masse. Gleiches gilt für $R_2$ und $R_5$.

Es ergeben sich die Teilwiderstände

$$R_2||R_5 = \frac{3 \times 6}{3+6}\,\Omega = 2\,\Omega$$
$$R_1||R_6 = \frac{3 \times 6}{3+6}\,\Omega = 2\,\Omega$$

Mit $R_3$ und $R_4$ jeweils in Reihe ergeben sich $5\,\Omega$ und diese liegen wiederum parallel zueinander, so dass sich letztlich

$$R_I = R_7 = 2{,}5\,\Omega$$

ergibt.

(b) Wie groß ist diese maximale Leistung?
**Lösung:** Hierzu braucht man dann noch die Leerlaufspannung oder den Kurzschlussstrom. Der Kurzschlussstrom ist etwas einfacher zu berechnen, es ergibt sich

$$\begin{aligned} I_{KS} &= U\left(\frac{1}{R_1 + \frac{R_3R_6}{R_3+R_6}} \times \frac{R_6}{R_3+R_6} + \frac{1}{R_2 + \frac{R_5R_4}{R_4+R_5}} \times \frac{R_5}{R_4+R_5}\right) \\ &= U\left(\frac{R_6}{R_1R_3 + R_1R_6 + R_3R_6} + \frac{R_5}{R_2R_4 + R_2R_5 + R_5R_4}\right) \\ &= 15\,\mathrm{A}\left(\frac{6}{9+18+18} + \frac{3}{18+18+9}\right) = 15\,\mathrm{A}\left(\frac{2}{15} + \frac{1}{15}\right) \qquad = 3\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

Und damit ist der Strom, wenn $R_7 = R_I = 2{,}5\,\Omega$ ist

$$I_7 = 1{,}5\,\mathrm{A}$$

und die Leistung ist mit

$$P_7 = I_7^2 R_7 = 5{,}625\,\mathrm{W}$$

## 8.4 Zweipol und Leistung

Ein aktiver Zweipol ist durch die Reihenschaltung seiner Quellenspannung $U_Q = 10\,\mathrm{V}$ und seines Innenwiderstandes $R_I = 10\,\Omega$, sowie durch eine zulässige innere Verlustleistung $P_{IMax} = 1\,\mathrm{W}$ gekennzeichnet.

(a) Bei welchem Lastwiderstand $R_a$ wird ohne Überlastung des aktiven Zweipols die maximale Leistung abgegeben?
**Lösung:** Um nicht überlastet zu werden darf die Verlustleistung in $R_I$ den gegebenen Wert nicht übersteigen, der Spannungsabfall dort muss als kleiner als

$$U_I \le \sqrt{P_{I_max} R_I} = \sqrt{10}\,\mathrm{V} \approx 3{,}162\,\mathrm{V}$$

sein. Damit muss der Lastwiderstand im optimalen Fall die Bedingung

$$U_I = U\frac{R_I}{R_I + R_a} \Leftrightarrow \qquad R_a = \left(\frac{U}{U_I} - 1\right) R_I = 21{,}62\,\Omega$$

erfüllen.

(b) Wie groß sind diese Leistung und der Wirkungsgrad?
**Lösung:** Da der Strom

$$I = \frac{U}{R_I + R_a} = 316{,}2\,\mathrm{mA}$$

fließt, ist die in der Last umgesetzte Leistung

$$P_a = I^2 R_a = 2{,}162\,\mathrm{W}.$$

Der Wirkungsgrad ist einfach

$$\eta = \frac{P_a}{P_a + P_I} = 68\%.$$

(c) Wie groß sind die erzeugte Leistung, die innere Verlustleistung, die an den Lastwiderstand abgegebene Leistung und der Wirkungsgrad bei Verdopplung des Lastwiderstandes gegenüber Fall (a)?
**Lösung:** Wenn $R_a' = 43{,}2\,\Omega$ ist, dann fließt nur der Strom

$$I' = \frac{U}{R_I + R_a'} = 188\,\mathrm{mA}.$$

Die Leistungen und der Wirkungsgrad sind also

$$\begin{aligned} P_I' &= I'^2 R_I = 0{,}353\,\mathrm{W} \\ P_a' &= I'^2 R_a' = 1{,}53\,\mathrm{W} \\ P_{ges}' &= 1{,}88\,\mathrm{W} \\ \eta' &= 81\,\%. \end{aligned}$$

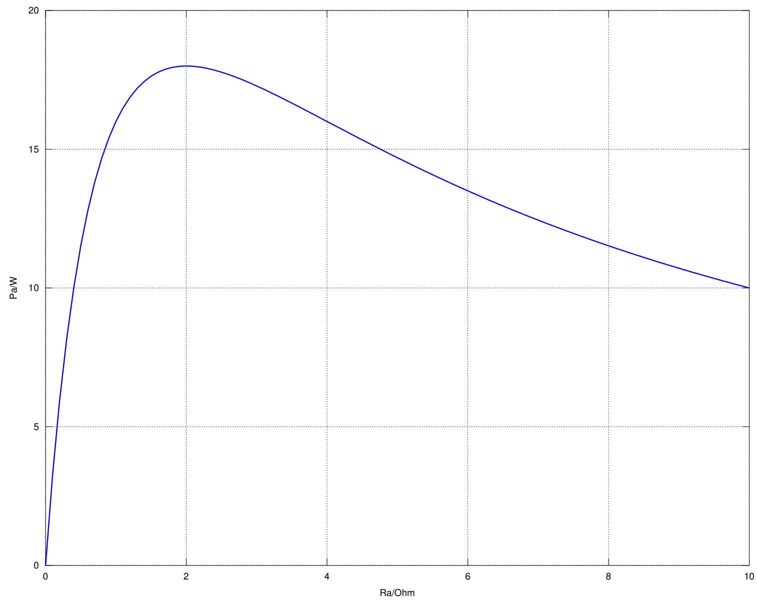
## 8.5 Grafische Darstellung

Eine Spannungsquelle mit der Leerlaufspannung $U_0 = 12\,\mathrm{V}$ und dem Innenwiderstand $R_i = 2\,\Omega$ wird mit einem einstellbaren Außenwiderstand $R_a$ belastet. Wie groß ist die vom Außenwiderstand aufgenommene Leistung $P_a$ in Abhängigkeit von $R_a$? Stellen Sie das Ergebnis grafisch dar.
**Lösung:** Strom und Spannung durch bzw. über $R_a$ sind

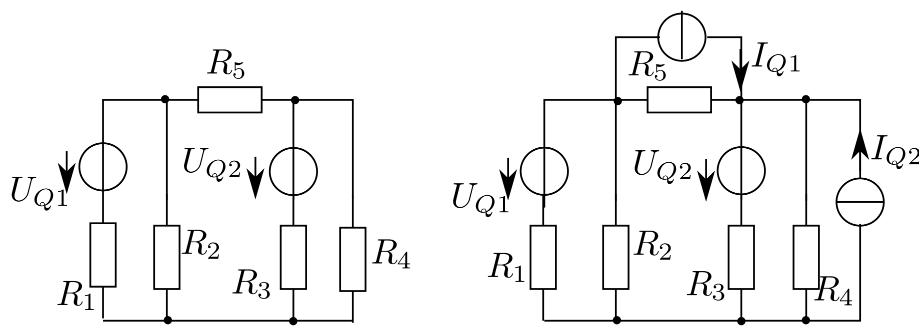
$$\begin{aligned} I &= U \times \frac{1}{R_i + R_a} \\ U_a &= U \times \frac{R_a}{R_i + R_a} \end{aligned}$$

Damit ist die Leistung

$$P_a = U^2 \frac{R_a}{(R_a + R_i)^2} = 144\,\mathrm{W} \times \frac{R_a/\Omega}{(R_a/\Omega + 2)^2}.$$




## 8.6 Zweigstromanalyse




(a) Berechnen Sie mit Hilfe der Zweigstromanalyse den Strom $I_5$ durch den Widerstand $R_5$ der linken Schaltung!
**Lösung:** Für die Knotengleichungen gilt

$$I_1 - I_2 - I_5 = 0$$
$$I_3 + I_4 - I_5 = 0$$

Für die Maschen dann

$$I_1R_1 + I_2R_2 = U_1$$
$$I_5R_5 + I_3R_3 - I_2R_2 = -U_2$$
$$I_3R_3 - I_4R_4 = -U_2$$

und als Gleichungssystem in Matrixschreibweise erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 & 0 & R_5 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_1 \\ -U_2 \\ -U_2 \end{pmatrix}$$

Und das Gleichungssystem löst man wie folgt auf:
Sinnvolle Vertauschung der Zeilen, so dass schon fast eine Diagonalform entsteht:

$$\begin{pmatrix} R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -R_2 & R_3 & 0 & R_5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ 0 \\ -U_2 \\ 0 \\ -U_2 \end{pmatrix}$$

Es wird die erste Spalte (in der zweiten Zeile) bereinigt:

$$\begin{pmatrix} R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ & -1-\frac{R_2}{R_1} & 0 & 0 & -1 \\ & -R_2 & R_3 & 0 & R_5 \\ & & 1 & 1 & -1 \\ & & R_3 & -R_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ -\frac{U_1}{R_1} \\ -U_2 \\ 0 \\ -U_2 \end{pmatrix}$$

Danach ist die zweite Spalte (dritte Zeile) dran

$$\begin{pmatrix} R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ & -1-\frac{R_2}{R_1} & 0 & 0 & -1 \\ & & R_3 & 0 & R_5+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \\ & & 1 & 1 & -1 \\ & & R_3 & -R_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ -\frac{U_1}{R_1} \\ -U_2+U_1\frac{R_2}{R_1+R_2} \\ 0 \\ -U_2 \end{pmatrix}$$

Jetzt noch die dritte Spalte, dazu werden nochmal vierte und fünfte Zeile vertauscht, weil die dann einfach substrahiert werden können

$$\begin{pmatrix} R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ & -1-\frac{R_2}{R_1} & 0 & 0 & -1 \\ & & R_3 & 0 & R_5+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \\ & & & +R_4 & R_5+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \\ & & & 1 & -1-\frac{R_5}{R_3}-\frac{R_1R_2}{R_3(R_1+R_2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ -\frac{U_1}{R_1} \\ -U_2+U_1\frac{R_2}{R_1+R_2} \\ U_1\frac{R_2}{R_1+R_2} \\ +\frac{U_2}{R_3}+U_1\frac{R_2}{R_3(R_1+R_2)} \end{pmatrix}$$

Die vierte Zeile wird nun normiert:

$$\begin{pmatrix} R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ & -1-\frac{R_2}{R_1} & 0 & 0 & -1 \\ & & R_3 & 0 & R_5+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \\ & & & 1 & \frac{R_5(R_1+R_2)+R_1R_2}{R_4(R_1+R_2)} \\ & & & 1 & -1-\frac{R_5}{R_3}-\frac{R_1R_2}{R_3(R_1+R_2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ -\frac{U_1}{R_1} \\ -U_2+U_1\frac{R_2}{R_1+R_2} \\ U_1\frac{R_2}{R_4(R_1+R_2)} \\ +\frac{U_2(R_1+R_2)+U_1R_2}{R_3(R_1+R_2)} \end{pmatrix}$$

Nun muss man nur noch die letzten beiden Zeilen voneinander subtrahieren und hat sofort

$$I_5\left(\frac{R_5(R_1+R_2)+R_1R_2}{R_4(R_1+R_2)}+1+\frac{R_5}{R_3}-\frac{R_1R_2}{R_3(R_1+R_2)}\right)=$$
$$U_1\frac{R_2}{R_4(R_1+R_2)}-\frac{U_2(R_1+R_2)+U_1R_2}{R_3(R_1+R_2)}$$
$$\Leftrightarrow I_5\frac{R_5R_3(R_1+R_2)+R_1R_2R_3+R_3R_4(R_1+R_2)+R_4R_5(R_1+R_2)+R_1R_2R_4}{R_3R_4(R_1+R_2)}=$$
$$U_1\frac{U_1R_2(R_3+R_4)-U_2R_4(R_1+R_2)}{R_3R_4(R_1+R_2)}$$
$$\Leftrightarrow I_5=\frac{U_1R_2(R_3+R_4)-U_2R_4(R_1+R_2)}{R_5R_3(R_1+R_2)+R_1R_2R_3+R_3R_4(R_1+R_2)+R_4R_5(R_1+R_2)+R_1R_2R_4}$$

(b) Wie unterscheidet sich das Gleichungssystem im rechten Bild vom linken Bild?
**Lösung:** Effektiv wird eine Spannungsquelle mit der Leerlaufspannung $I_{Q1}/R_5$ in den oberen Querzweig eingefügt, so dass die Maschengleichungen um diese Quelle ergänzt werden müssen und als Gleichungssystem ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1\\ R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -R_2 & R_3 & 0 & R_5\\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1\\ I_2\\ I_3\\ I_4\\ I_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{Q1}\\ I_{Q1}+I_{Q2}\\ U_1\\ -U_2\\ -U_2 \end{pmatrix}$$

(c) Gegeben sind

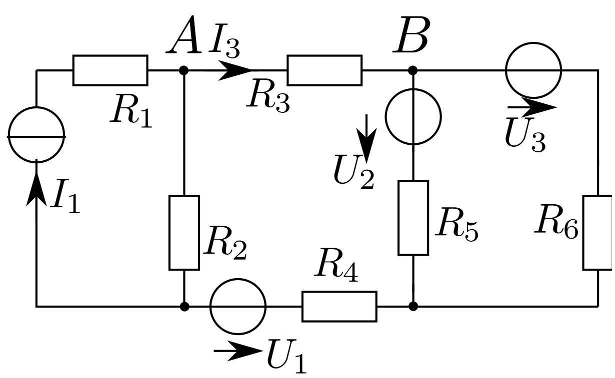
$$R_1=10\,\Omega,\quad R_2=15\,\Omega,\quad R_3=100\,\Omega,\quad R_4=30\,\Omega,$$
$$R_5=10\,\Omega,\quad U_1=10\,\mathrm{V},\quad U_2=20\,\mathrm{V}$$

Berechnen Sie $I_5$ wie im Aufgabenteil (a) angegeben!
**Lösung:** Einsetzen der Zahlen und Ausrechnen ergibt dann

$$I_5=35{,}43\,\mathrm{mA}$$

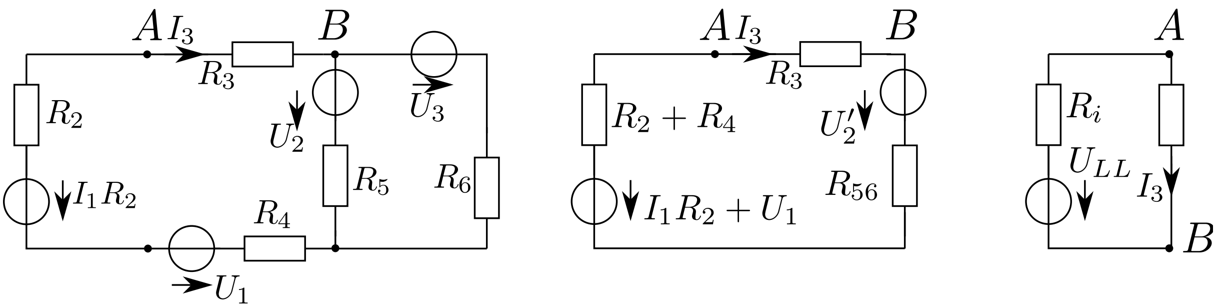
## 8.7 Zweipoltheorie

Berechnen Sie für das im Bild gezeigte Netzwerk den Strom $I_3$ durch den Widerstand $R_3$ nach der Zweipoltheorie.



...

**Lösung:** $R_1$ spielt keine Rolle, da in Serie zu einer idealen Stromquelle liegt. Ansonsten ist die Ersatzquelle bzgl. der Quellen $A$ und $B$ zu bestimmen. Dazu wird die Stromquelle $I_{Q1}$ mit Innenwiderstand $R_2$ in eine äquivalente Spannungsquelle umgewandelt.




Hier bei ist

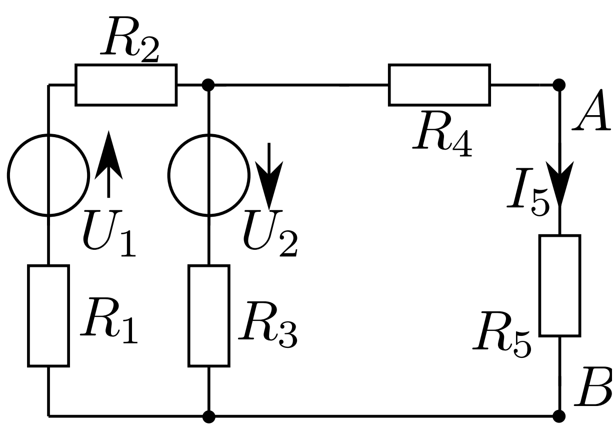
$$U_2' = \frac{U_2R_6 + U_3R_5}{R_5 + R_6}$$
$$R_{56} = \frac{R_5R_6}{R_5 + R_6}$$
$$U_{LL} = I_1R_2 + U_1 - \frac{U_2R_6 + U_3R_5}{R_5 + R_6}$$
$$R_i = R_2 + R_4 + \frac{R_5R_6}{R_5 + R_6}$$

Und dann ist mit der sehr vereinfachten Ersatzquelle

$$I_3 = \frac{U_{LL}}{R_i + R_3} = \frac{(I_1R_2 + U_1)(R_5 + R_6) - U_2R_6 - U_3R_5}{(R_2 + R_3 + R_4)(R_5 + R_6) + R_5R_6}$$

## 8.8 Zweipoltheorie

Gegeben sei die dargestellte Schaltung. Berechnen Sie den Strom $I_5$ durch $R_5$ mit Hilfe der Zweipoltheorie!



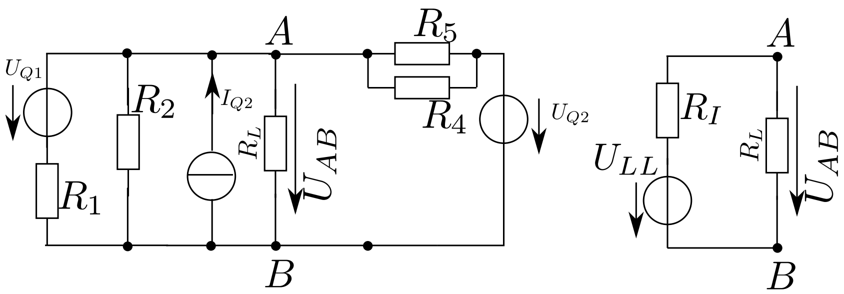
...
**Lösung:** Die Widerstände $R_1$ und $R_2$ lassen sich zu einem Innenwiderstand der Quelle mit $U_1$ zusammenfassen. Diese ist parallel geschaltet zu $U_2$, wobei die beiden allerdings entgegengesetzte Pfeile (Richtungen) aufweisen. Der Innenwiderstand der Gesamtquelle ist dann noch mit der Reihenschaltung mit $R_4$ zu modifizieren. Es ergibt sich so

$$\begin{aligned}U_{LL} &= \frac{U_2(R_1+R_2)-U_1R_3}{R_1+R_2+R_3}\\ R_i &= \frac{(R_1+R_2)R_3}{R_1+R_2+R_3}+R_4\\ &= \frac{(R_1+R_2)R_3+R_4(R_1+R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3}\end{aligned}$$

Und damit ist dann der Strom $I_5$ zu berechnen zu

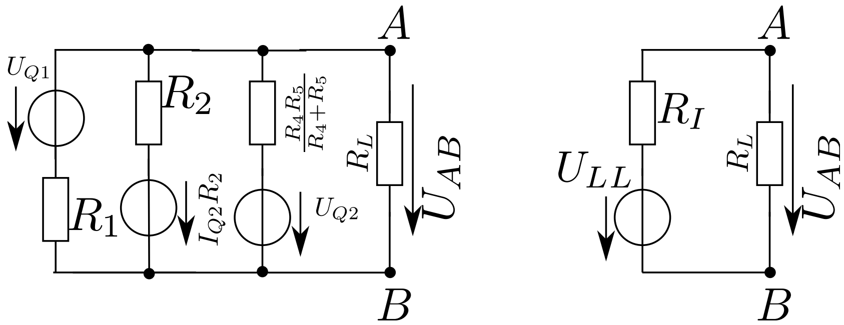
$$I_5 = \frac{U_{LL}}{R_i+R_5} \qquad = \frac{U_2(R_1+R_2)-U_1R_3}{(R_1+R_2)R_3+(R_4+R_5)(R_1+R_2+R_3)}$$

## 8.9 Ersatzspannungsquelle (14 Punkte)




Für die gezeigte Schaltung sind die Verhältnisse an den Klemmen A und B, insbesondere die Spannung $U_{AB}$, für beliebige Lastwiderstände $R_L$ zu bestimmen.

(a) Bestimmen Sie die äquivalente Ersatzspannungsquelle bzgl. der Klemmen A-B! (Sollte Ihnen dieses Schwierigkeiten bereiten, so gehen Sie weiter zu (b)!)
**Lösung:** Im Ergebnis ergibt sich folgendes:



$$\begin{aligned}
R_I &= R_1||R_2||\frac{R_4R_5}{R_4+R_5} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{R_I} &= \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{R_4+R_5}{R_4R_5} \\
&= \frac{R_2R_4R_5+R_1R_4R_5+R_1R_2(R_4+R_5)}{R_1R_2R_4R_5} \\
\Leftrightarrow R_I &= \frac{R_1R_2R_4R_5}{R_2R_4R_5+R_1R_4R_5+R_1R_2(R_4+R_5)}
\end{aligned}$$

Und für die Leerlaufspannung haben wir dann mit den folgenden Nebenrechnungen:

$$\begin{aligned}
R_2||R_{45} &= \frac{R_2R_4R_5}{R_2(R_4+R_5)+R_4R_5} \\
R_1||R_{45} &= \frac{R_1R_4R_5}{R_1(R_4+R_5)+R_4R_5} \\
R_2||R_2 &= \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}
\end{aligned}$$

und dann

$$\begin{aligned}
U_{LL1} &= U_{Q1}\frac{R_2R_4R_5}{R_1(R_2(R_4+R_5)+R_4R_5)+R_2R_4R_5} \\
U_{LL2} &= I_{Q2}R_2\frac{R_1R_4R_5}{R_2(R_1(R_4+R_5)+R_4R_5)+R_1R_4R_5} \\
U_{LL3} &= U_{Q2}\frac{R_1R_2}{\frac{R_4R_5}{R_4+R_5}(R_1+R_2)+R_1R_2} \\
&= U_{Q2}\frac{R_1R_2(R_4+R_5)}{R_4R_5(R_1+R_2)+R_1R_2(R_4+R_5)}
\end{aligned}$$

Und schließlich natürlich die Summe der einzelnen Anteile:

$$\begin{aligned}
U_{LL} &= U_{LL1}+U_{LL2}+U_{LL3} \\
&= U_{Q1}\frac{R_2R_4R_5}{R_1(R_2(R_4+R_5)+R_4R_5)+R_2R_4R_5}+ \\
&\quad I_{Q2}R_2\frac{R_1R_4R_5}{R_2(R_1(R_4+R_5)+R_4R_5)+R_1R_4R_5}+ \\
&\quad U_{Q2}\frac{R_1R_2(R_4+R_5)}{R_4R_5(R_1+R_2)+R_1R_2(R_4+R_5)}
\end{aligned}$$

**Bewertung: Insgesamt 2 Punkte für den Innenwiderstand und 3 Punkte für die Leerlaufspannung, also 5 Punkte**

(b) Die Widerstände $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = R$ sind alle gleich und die Quellen haben eine Leerlaufspannung von $U_{Q1} = U_{Q2} = I_{Q2}R = U_Q$. Geben Sie nun die ausgerechneten Werte des Ersatzzweipols und auch den Kurzschlussstrom an den Klemmen A-B an! (Wenn Sie Ihrem Aufgabenteil (a) nicht vertrauen, versuchen sie es hier nochmal!)
**Lösung:** Es ist nun alles viel einfacher und es ergibt sich unmittelbar

$$\begin{aligned} U_{LL} &= \frac{1}{4}U_Q + \frac{1}{4}U_Q + \frac{1}{2}U_Q = U_Q \\ R_I &= \frac{1}{4}R \\ I_{KS} &= 4\frac{U_Q}{R} \end{aligned}$$

**Bewertung: (3) Punkte, jeweils einer für den Innenwiderstand, Leerlaufspannung und Kurzschlußstrom.**

(c) Bestimmen Sie die in $R_L$ umgesetzte Leistung! Spannungen und Widerstände sind natürlich wie oben gegeben.
**Lösung:** Leistungsumsatz in einem Widerstand $R_L$ ist dann

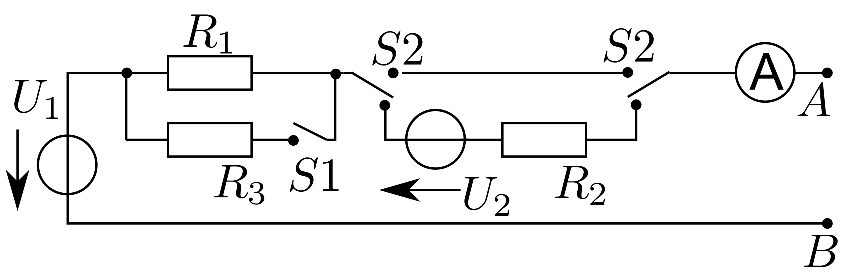
$$P_L = \left(\frac{U_{LL}}{R_L + R_I}\right)^2 R_L = 16\frac{U_Q^2}{(4R_L + R)^2}R_L$$

**Bewertung: (2) Punkte, ggf. Punkte bei Folgefehlern geben!**

(d) Wie groß sollte $R_L$ sein, damit in ihm die maximal mögliche Leistung umgesetzt werden kann? Wie groß ist diese Leistung?
**Lösung:** Für Leistungsanpassung gilt natürlich $R_L = R_I$ ud damit hier $R_L = \frac{1}{4}R$. Umgesetzt wird dann die Leistung $P_{L,max} = \frac{U_Q^2}{R}$.
**Bewertung: (2) Punkte, einer für den richtigen Widerstand, einer für die Leistung**

(e) Vergleichen Sie den hier berechneten Zweipol (Ersatzspannungsquelle) mit einer einfachen Quelle mit der Leerlaufspannung $U_Q$ und dem Innenwiderstand $R$! (Mindestens ein vollständiger Satz!)
**Lösung:** Im Prinzip ist die hier berechnete Quelle sehr ähnlich der einfachen. Unterschied ist nur der *Innenwiderstand, der nur ein Viertel der einfachen beträgt.* Dadurch sind natürlich auch *Kurzschlußstrom und maximal abgebbare Leistung viermal so hoch.*
**Bewertung: (2) Punkte, siehe Unterstreichungen.**

## 8.10 Ersatzspannungsquelle (14 Punkte)



In oben gezeigter Spannungsquelle soll die innere Verschaltung in Abhängigkeit vom entnommenen Strom (Amperemeter mit verschwindendem Innenwiderstand) durch Umlegen der Schalter $S1$ und $S2$ geregelt werden.

(a) Geben Sie alle drei Parameter der Ersatzspannungsquelle für die alle vier möglichen Schalterstellungen an! (4 Punkte)
**Lösung:**

**Bemerkung: In der Originalklausur lag $S1$ als Umschalter zwischen $R_1$ und $R_3$, damit weichen dort die Ergebnisse ab.**

Es gibt vier sinnvolle Schalterstellungen, die Ergebnisse sind

$$\begin{aligned}
&1: S1 \text{ oben}, S2 \text{ oben}, && U_{LL} = U_1, && R_I = R_1, && I_{KS} = \frac{U_1}{R_1} \\
&2: S1 \text{ unten}, S2 \text{ oben}, && U_{LL} = U_1, && R_I = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}, && I_{KS} = \frac{U_1(R_1 + R_3)}{R_1 R_3} \\
&3: S1 \text{ oben}, S2 \text{ unten}, && U_{LL} = U_1 + U_2, && R_I = R_1 + R_2, && I_{KS} = \frac{U_1 + U_2}{R_1 + R_2} \\
&4: S1 \text{ unten}, S2 \text{ unten}, && U_{LL} = U_1 + U_2, && R_I = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}, && I_{KS} = \frac{(U_1 + U_2)(R_1 + R_2)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}
\end{aligned}$$

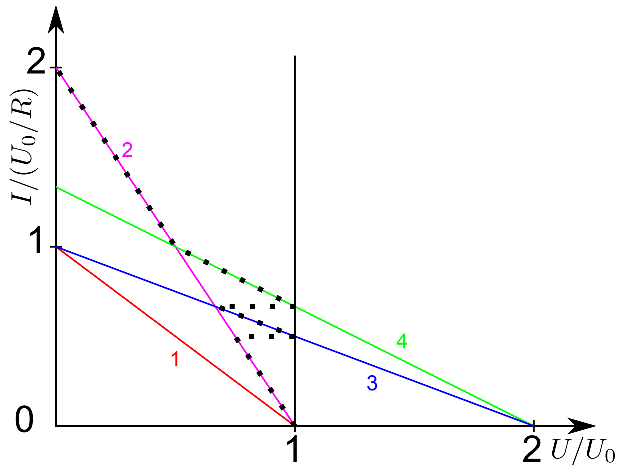
**Für jeden Fall 1 Punkt**

(b) Die Widerstände $R_1 = R_2 = R_3 = R$ sind alle gleich und die Quellen haben eine Leerlaufspannung von $U_1 = U_2 = U_0$. Geben Sie nun die oben ausgerechneten Werte der jeweiligen Ersatzquellen an und zeichnen Sie die Arbeitsgerade in ein $U-I$-Diagramm! (Wenn Sie Ihrem Aufgabenteil (a) nicht vertrauen, versuchen sie es hier nochmal!) (2 Punkte)
**Lösung:** Es ist nun alles viel einfacher und es ergibt sich unmittelbar

$$\begin{aligned}
&1: S1 \text{ oben}, S2 \text{ oben}, && U_{LL} = U_0, && R_I = R, && I_{KS} = \frac{U_0}{R} \\
&2: S1 \text{ unten}, S2 \text{ oben}, && U_{LL} = U_0, && R_I = \frac{R}{2}, && I_{KS} = \frac{2U_0}{R} \\
&3: S1 \text{ oben}, S2 \text{ unten}, && U_{LL} = 2U_0, && R_I = 2R, && I_{KS} = \frac{U_0}{R} \\
&4: S1 \text{ unten}, S2 \text{ unten}, && U_{LL} = 2U, && R_I = 1{,}5R, && I_{KS} = \frac{4U_0}{3R}
\end{aligned}$$

**(Für jeden Teil 0,5 Punkte, insgesamt 2 Pkt))**

Die Arbeitsgerade sind im folgenden Diagramm eingezeichnet:




(c) (*) Die Schalterstellungen werden wie folgt (Reihenfolge der Prioritäten) in Abhängigkeit vom gemessenen Strom geschaltet:

i. Die Ausgangsspannung ist immer kleiner als $U_0$

ii. Die Ausgangsspannung soll immer möglichst hoch sein (aber eben niemals über $U_0$)

iii. Der Spannungsabfall an den internen Widerständen soll möglichst gering sein.

Zeichnen Sie in das Diagramm den Pfad dem durch die geregelte Schalterstellung zu folgen ist! (3 Punkte)
**Lösung:** Gestrichelter Pfad in vorheriger Lösung.

**(Drei Punkte für den richtigen Pfad)**

(d) Welche Leistung wird in den internen Widerständen verbraucht, wenn die Klemmen $A$ und $B$ leer laufen? (1 Punkt)
**Lösung:** Ist ja alles in Reihe, also fließt kein Strom, wo kein Strom fließt wird keine Leistung verbraucht. **(1 Punkt)**

(e) Welche Leistung kann der Quelle maximal entnommen werden, wenn $S1$ in Stellung "oben" und $S2$ in Stellung "unten" ist? Wie groß ist dann der Wirkungsgrad? (Ein Sonderpunkt, wenn Sie das Ergebnis mit $U_1$,$U_2$,$R_1$,$R_2$,$R_3$ angeben!) (4 Punkte)
**Lösung:** Das ist dann eine Quelle mit

$$U_{LL} = U_1 + U_2, \qquad R_I = R_1 + R_2$$
$$U_{LL} = 2U_0, \qquad R_I = 2R$$

und damit ist der Widerstand für Leistungsanpassung

$$R_L = R_1 + R_2$$
$$R_L = 2R$$

**(1 Punkt)**

und die Leistungsentnahme ist

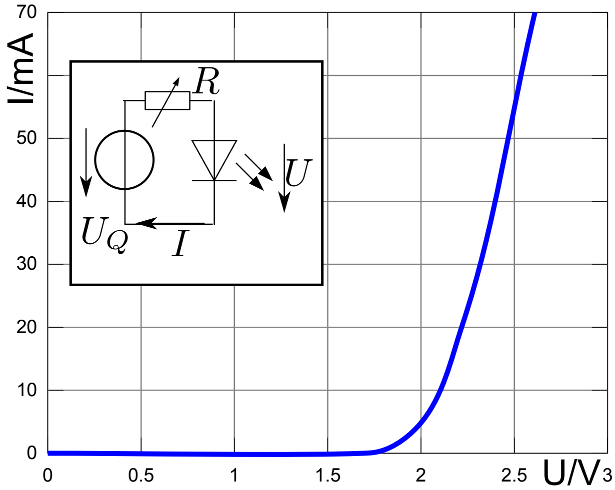
$$P_L = \frac{(U_1 + U_2)^2}{4(R_1 + R_2)}$$
$$P_L = \frac{U_0^2}{2R}$$

**(1 Punkt)** und der Wirkungsgrad ist jeweils $\eta = 50\,\%$. **(1 Punkt)**

**(und noch 1 Punkt wenn das Ergebnis allgemein dargestellt wurde)**

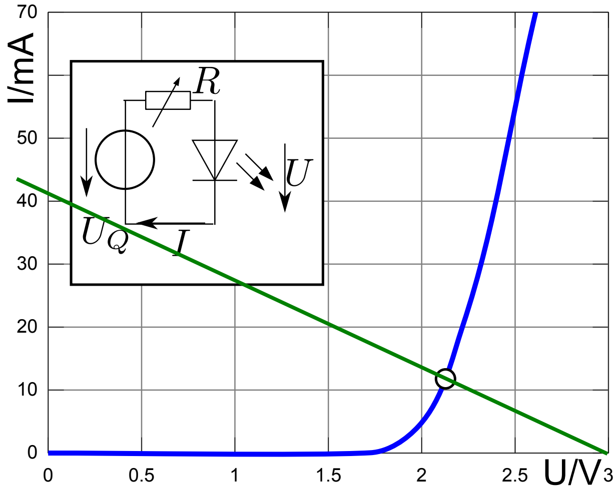
# 9 Berechnung von Kreisen mit nichtlinearen Elementen und gesteuerten Quellen

## 9.1 Leuchtdiode




Eine Leuchtdiode in gezeigter Schaltung mit gegebener Kennlinie soll niedrig ausgesteuert werden. Die Quellenspannung beträgt $U_Q = 3\,\mathrm{V}$.

(a) Bestimmen Sie den Arbeitspunkt der LED so, dass in ihr $P_{LED} = 25\,\mathrm{mW}$ verbraucht werden.
**Lösung:**

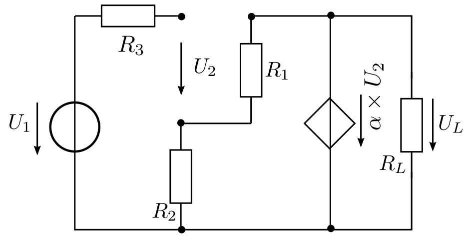



Bei ca. $U = 2{,}2\,\mathrm{V}$, $I = 12\,\mathrm{mA}$ ist dieses erfüllt, dann werden ca. $P = 26\,\mathrm{mW}$ verbraucht.

(b) Dimensionieren Sie den Innenwiderstand $R$ so, dass die o.g. Bedingungen erfüllt werden!
**Lösung:** Die gezeigte Gerade durch den Punkt der Leerlaufspannung $U = 3\,\mathrm{V}$ und den Arbeitspunkt ergibt einen Kurzschlussstrom der Quelle von $I_K \approx 42\,\mathrm{mA}$. Der Innenwiderstand muss daher $R \approx 70\,\Omega$ betragen.

(c) Bestimmen Sie den Wirkungsgrad (nur den elektrischen) der Schaltung!
**Lösung:** Insgesamt werden der Quelle $P_Q = 12\,\mathrm{mA} \times 3\,\mathrm{V} = 36\,\mathrm{mW}$ entnommen und ca. $P = 26\,\mathrm{mW}$ an Leistung in der LED umgesetzt. Der Wirkungsgrad ist damit $\eta = P/P_Q = 72\,\%$.

## 9.2 Spannungsgesteuerte Quelle




Die Ausgangsspannung $U_L$ in oben stehender Schaltung ist zu berechnen.

(a) Geben Sie $U_L$ als Funktion der gegebenen anderen Parameter an!
**Lösung:** Unmittelbar ersichtlich ist, dass $U_L = \alpha \times U_2$ ist. Ein Spannungsumlauf am Eingangskreis ergibt $U_2 = U_1 - \frac{R_2}{R_1+R_2}\alpha U_2$, wobei der Spannungsteiler aus $R_1$ und $R_2$ verwendet wurde. Wir lösen o.g. Gleichung nach $U_2$ auf und bekommen mit der ersten Gleichung

$$U_L = \alpha U_2 = \alpha \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2(\alpha + 1)} U_1$$

(b) Wie groß ist die Spannungsverstärkung $U_L/U_1$ für den Fall, dass $\alpha \to \infty$ wird?
**Lösung:** In diesem Grenzübergang wird

$$\frac{U_L}{U_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 1 + \frac{R_1}{R_2}$$

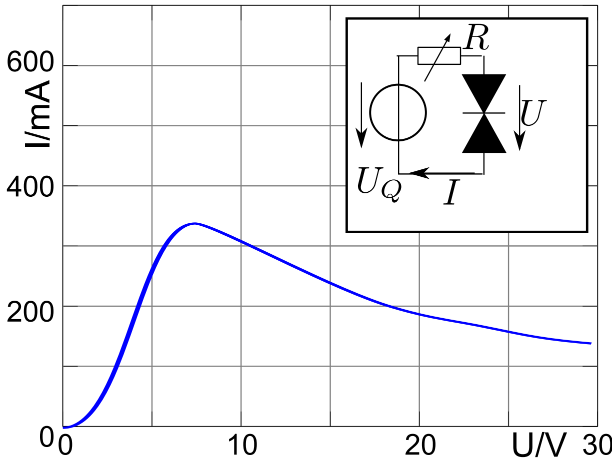
(c) Berechnen Sie für diesen Fall die steuernde Spannung $U_2$!
**Lösung:** Aus dem Spannungsteiler mit der berechneten Information ergibt sich der Spannungsabfall am Widerstand $R_2$ zu

$$U_{R2} = U_L \frac{R_2}{R_1 + R_2} = U_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{R_1 + R_2}{R_2} = U_1$$

Und damit ist natürlich $U_2 = 0$. Dieses ist eine allgemeingültige Regel bei gesteuerten Spannungsquellen (Operationsverstärkern) mit ideal unendlicher Verstärkung $\alpha$ und einer Rückkopplung. Es wird sich immer ein Zustand einstellen, bei dem durch die Spannung am Ausgang über die Rückkopplung am Eingang die Spannung kompensiert wird.

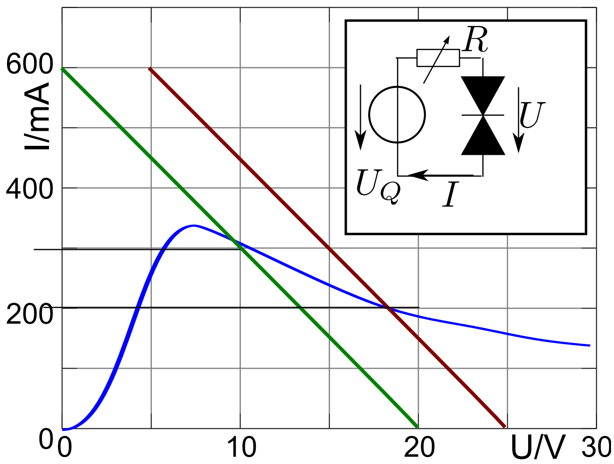
(d) Kommentieren Sie den Einfluss von $R_L$!
**Lösung:** Da die gesteuerte Spannungsquelle ideal ist, hat $R_L$ keinen Einfluss. Dieses würde sich ändern, wenn die Quelle mit $\alpha U_2$ einen Innenwiderstand hätte, dann wäre sie natürlich nicht mehr in der Lage über jedem beliebigen Lastwiderstand ihre Spannung zu halten.

## 9.3 Differentieller (Kleinsignal) Widerstand




Eine einfache Schaltung mit einem nichtlinearen Element ist vorgegeben. Für die Interessierten: Es handelt sich dabei um eine Gunn-Diode, wie sie zur Erzeugung von Signalen im Mikrowellenbereich oberhalb 10 GHz verwendet werden kann. Diese Schaltung soll dimensioniert werden.

(a) Die Leerlaufspannung der Quelle beträgt $U_Q = 20\,\mathrm{V}$. Bestimmen Sie den Innenwiderstand $R$ so, dass die Diode am Arbeitspunkt mit $U = 10\,\mathrm{V}$ und $I = 300\,\mathrm{mA}$ betrieben werden kann!
**Lösung:**



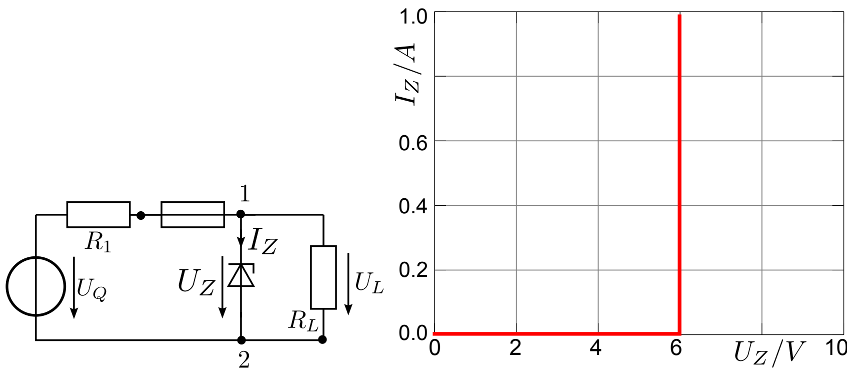

Gemäß Graphik ist ein Kurzschlussstrom von ca. $I_K = 600\,\mathrm{mA}$ notwendig. Daher muss der Innenwiderstand $R = U_Q/I_K = 33\,\Omega$ betragen.

(b) Die Spannung $U_Q$ wird auf $U_Q = 25\,V$ erhöht. Geben Sie nun die Arbeitsgerade an, bestimmen Sie den neuen Arbeitspunkt und geben Sie den Kleinsignalwiderstand an (berechnet aus der Steigung der Geraden zwischen den AP)!
**Lösung:** Siehe Graphik ergibt sich die neue Arbeitsgerade durch Parallelverschiebung der ersten. Der AP ist $U = 18\,\mathrm{V}$, $I = 200\,\mathrm{mA}$. Daraus ergibt sich eine Differenz zum ersten

AP von $\Delta U = 8\,\mathrm{V}$, $\Delta I = -100\,\mathrm{mA}$. Der differentielle Widerstand ist also $r = \Delta U/\Delta I = -80\,\Omega$.

(c) Wie würden Sie dieses Kleinsignalverhalten beschreiben?
**Lösung:** Der negative differentielle Widerstand beschreibt im Prinzip eine Leistungsquelle im Kleinsignalersatzschaltbild. Dieses wird ausgenutzt, denn durch dieses Verhalten kommt es zu einer Oszillation, die im Mikrowellenbereich stattfindet. Es entsteht ein sehr hochfrequentes Signal mit erklecklicher (Kleinsignal 800 mW) Leistung.

## 9.4 Überspannungssicherung

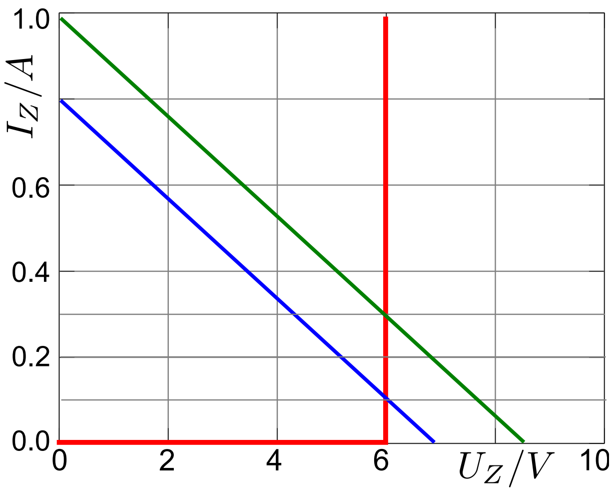



Eine empfindliche elektronische Schaltung, die durch den Widerstand $R_L$ beschrieben wird, soll durch die o.g. Schaltung mittels Zenerdiode mit einer konstanten Spannung versorgt und vor Überspannung durch Fehlbedienung gesichert werden. Die Zenerdiode wird durch eine idealisierte Kennlinie beschrieben. Die Sicherung sei widerstandslos und schmelze bei $I_S = 400\,\mathrm{mA}$. Der Innenwiderstand der Quelle beträgt $R_1 = 10\,\Omega$ und die Last hat einen Widerstand von $R_L = 60\,\Omega$.

(a) Bestimmen Sie die Ersatzspannungsquelle des linearen Schaltungsteils (allgemein und mit $U_Q = 8\,\mathrm{V}$)!
**Lösung:** Einfach eine Spannungsquelle mit Mit den o.g. Widerstandsverhältnissen ergibt sich bzgl. der Klemmen 1-2 eine Spannungsquelle mit

$$U_{LL} = \frac{R_L}{R_L + R_1} U_Q = 6{,}857\,\mathrm{V}$$
$$R_I = \frac{R_L R_1}{R_L + R_1} = 8{,}571\,\Omega$$
$$I_{KS} = 800\,\mathrm{mA}$$

(b) Bestimmen Sie die Arbeitsgerade dieser Ersatzspannungsquelle und bestimmen Sie den Strom durch die Zenerdiode bei $U_Q = 8\,\mathrm{V}$!
**Lösung:** Siehe Graphik:




Abgelesen fließt ein Strom von $I_Z \approx 100\,\mathrm{mA}$.

Oder durch einfache Berechnung: Es müssen durch $R_L$ 100 mA fließen, damit dort die geforderten 6 V abfallen. Damit müssen an dem Innenwiderstand $R_1$ 2 V abfallen, also 200 mA hindurch fließen. Der Strom dafür sind 200 mA, also 100 mA als durch $R_L$, und diese gehen eben durch die Diode.

(c) Wie groß ist der Gesamtstrom durch die Sicherung?
**Lösung:** Argumentation siehe auch oben.

Durch die Diode fließen $I_Z = 100\,\mathrm{mA}$ und durch die Last fließen noch $I_L = 6\,\mathrm{V}/R_L = 200\,\mathrm{mA}$. Somit fließen insgesamt $I_S = 200\,\mathrm{mA}$ durch die Sicherung.

(d) Bestimmen Sie zeichnerisch, bei welcher Quellenspannung $U_Q$ die Sicherung schmelzen wird!
**Lösung:** Die Sicherung löst bei $I_S = 400\,\mathrm{mA}$ aus. Konstant $I_L = 100\,\mathrm{mA}$ fließen durch die Last. Wenn also mehr als $I_Z = I_S - I_L = 300\,\mathrm{mA}$ durch die Diode fließen, wird die Sicherung auslösen. Das ist (grüne Linie).

Abgelesen ergibt sich eine Leerlaufspannung der Ersatzquelle von $U'_{LL} = 8{,}5\,\mathrm{V}$ bzw. ein Kurzschlussstrom von 1 A. Dieses ergibt also eine Quellenspannung $U'_Q = 7/6 \times U'_{LL} = 9{,}92\,\mathrm{V}$.

Oder rechnerisch heißt es, dass 400 mA durch $R_1$ fließen und dort für 4 V Spannungsabfall sorgen. die Gesamtspannung der Quelle beträgt also 10 V.

(e) Welche Leistung muss die Zenerdiode dann mindestens aushalten und wie ist der Wirkungsgrad, also das Verhältnis der Leistung in der Last zur Gesamtleistung, die der Quelle entnommen wird?
**Lösung:**

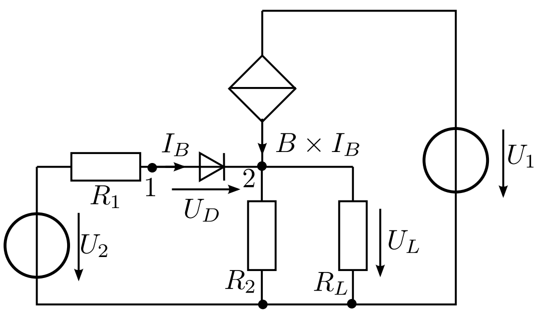
Leistung in der Last ist immer $P_L = U_Z^2/R_L = 6^2/60\,\mathrm{W} = 0{,}6\,\mathrm{W}$

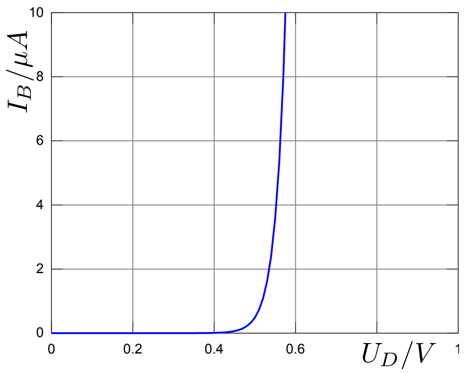
Betrachtung für 8 V:
Leistung in der Zenerdiode ist $P_Z = U_Z \times I_Z = 6 \times 0{,}1\,\mathrm{W} = 0{,}6\,\mathrm{W}$. Und Leistung aus der Quelle ist $P_Q = 0{,}2 \times 8\,\mathrm{W} = 1{,}6\,\mathrm{W}$. Der Wirkungsgrad ist dann $\eta = 37{,}5\,\%$.

Betrachtung für 10 V:
Leistung in der Zenerdiode ist $P_Z = U_Z \times I_Z = 6 \times 0{,}3\,\mathrm{W} = 1{,}8\,\mathrm{W}$. Und Leistung aus der Quelle ist $P_Q = 0{,}4 \times 10\,\mathrm{W} = 4\,\mathrm{W}$. Der Wirkungsgrad ist dann $\eta = 15\,\%$.

(f) Wo ist die Leistung, die nicht in der Diode oder der Last verbraucht wird und wie groß ist diese?
**Lösung:** Dieser Anteil der Gesamtleistung wird natürlich in dem Innenwiderstand der Quelle verbraucht. Bei einem Spannungsabfall von $U_i = 4\,\mathrm{V}$ sind das $P_i = 1{,}6\,\mathrm{W}$ bei 10 V Betriebsspannung. Damit stimmt dann auch die gesamte Leistungsbilanz wieder.

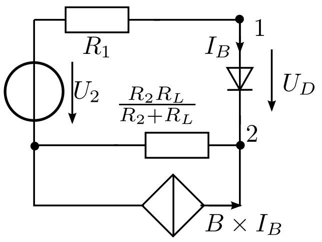
## 9.5 Einfache Transistorschaltung

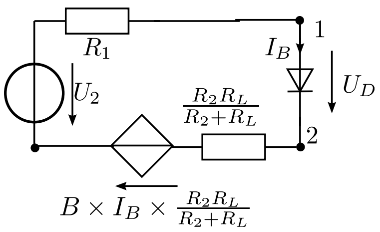



Gegeben ist das (sehr) vereinfachte Ersatzschaltbild eines Transistors in Kollektor (Emitterfolger) Schaltung. Das Ziel ist es, die Ausgangsspannung $U_L$ zu ermitteln. Die Parameter der Schaltung sind wie folgt: $R_1 = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = R_L = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $B = 100$, $U_1 = 5\,\mathrm{V}, U_2 = 1\,\mathrm{V}$

(a) Vereinfachen Sie den linearen Teil der Schaltung nach der Zweipoltheorie (Ersatzspannungsquelle) bzgl. der Klemmen 1 und 2.
**Lösung:** Die Lösung erfolgt graphisch und ist wie folgt dargestellt:




Die Werte sind

$$\begin{aligned} R_1 &= 10\,\mathrm{k\Omega}, \\ \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} &= 1\,\mathrm{k}\Omega, \\ B \times I_B \times \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} &= 100\,\mathrm{k}\Omega \times I_B. \end{aligned}$$

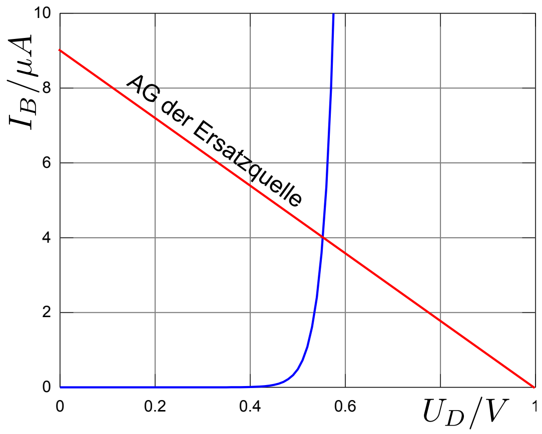
In einfachster Betrachtung kann die gesteuerte Quelle als Widerstand betrachtet werden, denn es ist eine Spannungsquelle, die ihren Spannungsabfall proportional zur durchfließenden Stromstärke steuert. Dann besteht der ganze Kreis nur noch aus einer Quelle $U_2$ und einem Zusammengefassten Widerstand

$$R_i = B \times \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} + \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} + R_1 = 111\,\mathrm{k}\Omega$$

(b) Stellen Sie die Gleichung für die Arbeitsgerade $I_B = f(U_D)$ der **Ersatzspannungsquelle** bzgl. der Klemmen 1 und 2 auf!
**Lösung:** Mit der Abkürzung $R_{2L} = \frac{R_2 R_L}{R_2+R_L}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} U_2 - R_1 I_B - R_{2L} I_B - B R_{2L} I_B &= U_D \\ \Leftrightarrow I_B &= \frac{U_2 - U_D}{R_1 + (B+1) R_{2L}} \\ \Rightarrow I_B &= \frac{1\mathrm{V}}{111\,\mathrm{k}\Omega} - \frac{U_D}{111\,\mathrm{k}\Omega} \\ &= 9\,\mu\mathrm{A} - 9\,\mu\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}} U_D \end{aligned}$$

(c) Zeichnen Sie die AG in das vorbereitete Diagramm ein und bestimmen Sie den Strom $I_B$ durch die Diode!
**Lösung:** Siehe Graphik:

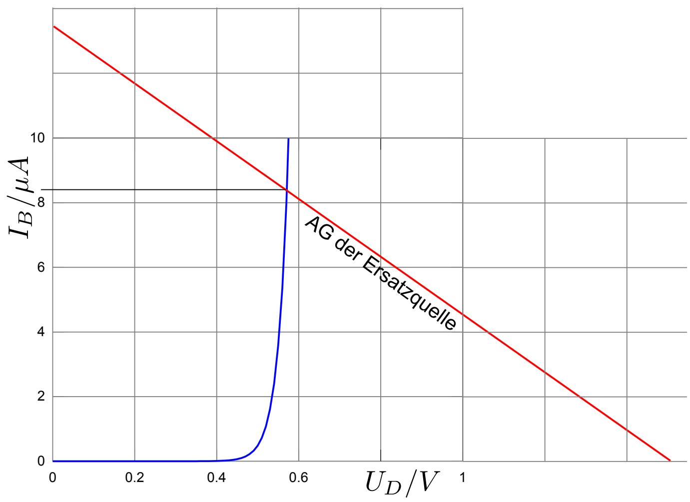



Abgelesen ergibt sich ein Arbeitspunkt von $I_B = 4\,\mu\mathrm{A}$, $U_D = 0{,}55\,\mathrm{V}$.

(d) Bestimmen Sie nun die Ausgangsspannung $U_L$!
**Lösung:** Durch den Stromteiler, gebildet aus $R_2$ und $R_L$, fließt der Strom $(B+1)I_B = 101 \times 4\,\mu\mathrm{A} = 404\,\mu\mathrm{A}$. Damit fällt also eine Spannung von $U_L = 0{,}404\,\mathrm{V}$ ab.

(e) Wiederholen Sie die Berechnungen für $U_2 = 1{,}5\,\mathrm{V}$!
**Lösung:** Mit der geänderten Spannung ergibt sich eine Parallelverschiebung der Arbeitsgerade des linearen Teils auf

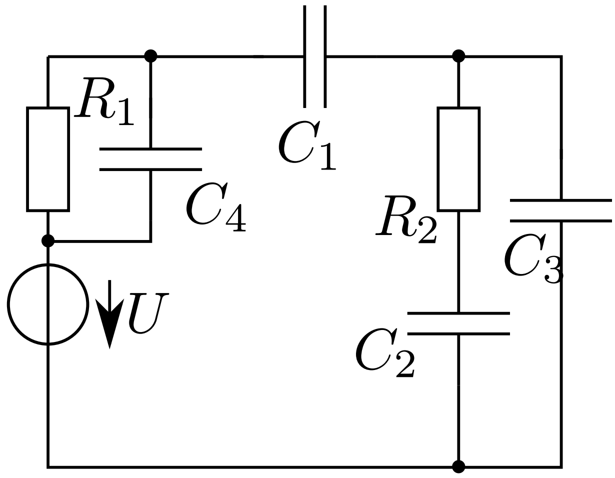
$$I_B = 13{,}5\,\mu\mathrm{A} - 9\,\mu\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}} U_D.$$




Abgelesen ergibt sich ein Strom von $I_D = 8{,}4\,\mu$A, bei nahezu unveränderter Spannung an der Diode. Die Ausgangsspannung ist analog dann mit $(B+1)I_B = 101 \times 4\,\mu\text{A} = 848\,\mu\text{A}$ dann $U_L = 0{,}848\,\text{V}$.

# 10 Kapazitäten im eingeschwungenen (DC) Zustand

## 10.1 Ladung




Berechnen Sie die Ladung $Q_2$ auf $C_2$!
**Lösung:** Die Widerstände können vernachlässigt werden, da kein Strom fließt, allein $C_1$ kann dieses verhindern. $C_4$ ist zudem über $R_1$ nach langer Zeit entladen. Es folgt also für die Ladung auf $C_2$ zunächst nach dem Spannungsteiler

$$U_2 = U\frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3}$$
$$Q_2 = U\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3}$$

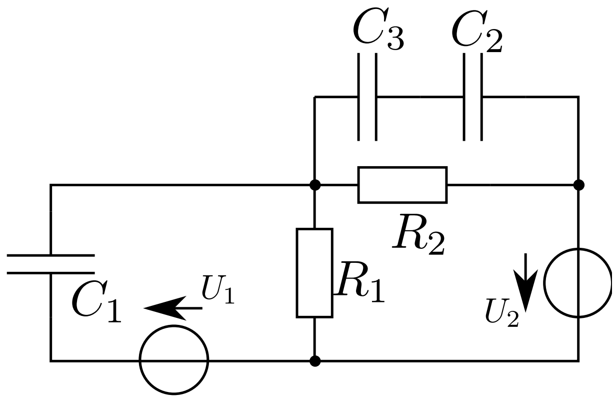
Alternativ kann die Aufgabe recht gut mit dem Ladungsteiler berechnet werden. Die Argumente wie oben gelten weiter. Es ergibt sich dann für die (wirksame) Gesamtkapazität und die Ladung

$$C_{ges} = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}$$
$$Q_{ges} = UC_{ges} = U\frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}$$

und diese Ladung ist auf $C_1$ und $C_2 + C_3$ vorhanden. Auf $C_2$ ist nun die zwischen $C_2$ und $C_3$ geteilte Gesamtladung, also

$$Q_2 = Q_{ges}\frac{C_2}{C_2 + C_3} = U\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3}$$

### 10.2 Widerstände und Kapazitäten



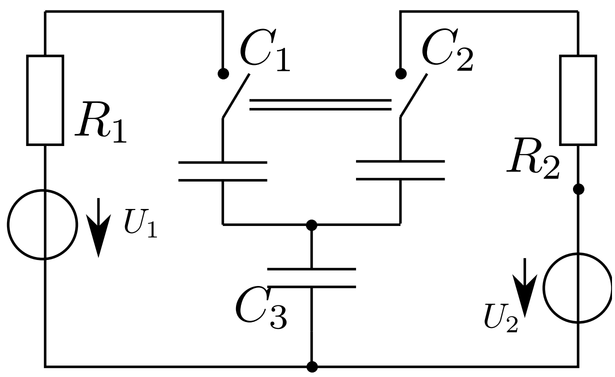

Berechnen Sie in der gegebenen Schaltungen Spannung $U_3$ und Ladung $Q_3$ über bzw. auf der Kapazität $C_3$.
**Lösung:** Die Spannungsverhältnisse werden allein durch die Widerstände $R_1$ und $R_2$ sowie für die rechte Seite allein von $U_2$ bestimmt. Rechts kann $U_1$ keinen Beitrag beisteuern, da von dieser Quelle kein Strom gezogen wird. Es folgt also

$$U_{C3} = U_2 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times \frac{C_2}{C_2 + C_3}$$
$$Q_{C3} = U_2 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$$

Die Spannung über $C_1$ ist aber von beiden Spannungsquellen bestimmt:

$$U_{C1} = U_1 + U_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

### 10.3 Schalten zwischen Kapazitäten




Die Kapazitäten $C_1 = 3\,\mathrm{nF}$, $C_2 = 5\,\mathrm{nF}$ und $C_3 = 6\,\mathrm{nF}$ enthalten keine Ladung. Die vorhandenen Spannungsquellen liefern die Spannungen $U_1 = 120\,\mathrm{V}$ und $U_2 = 80\,\mathrm{V}$ über die jeweiligen Innenwiderstände $R_1 = R_2 = 10\,\Omega$.

Welche Spannungen $U_{C1}$,$U_{C2}$,$U_{C3}$ liegen lange nach dem Schließen des Schalters an den Kapazitäten an?
**Lösung:** Es können die Maschengleichungen und die Knotengleichung aufgestellt werden´:

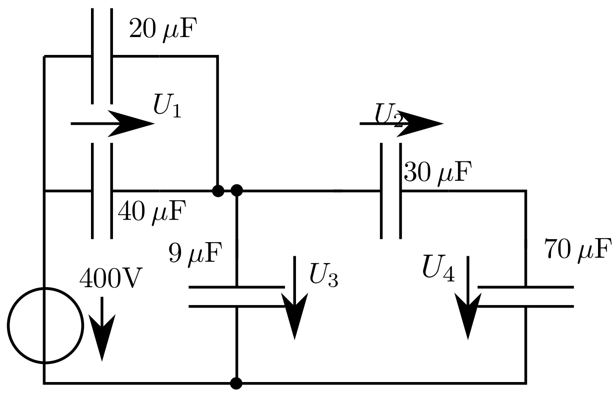
$$\begin{aligned}
U_1 &= U_{C1} + U_{C3} \\
U_2 &= U_{C2} + U_{C3} \\
I_{C1} + I_{C2} &= I_{C3} \\
\text{bzw. } Q_{C1} + Q_{C2} &= Q_{C3} \\
\leftrightarrow C_3 U_{C3} &= C_1 U_{C1} + C_2 U_{C2}
\end{aligned}$$

Dieses gesamte Gleichungssystem kann nun aufgestellt und gelöst werden, so dass

$$\begin{aligned}
C_3 U_{C3} &= C_1(U_1 - U_{C3}) + C_2(U_2 - U_{C3}) \\
\Leftrightarrow U_{C3} &= \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2 + C_3} = 54{,}29\,\mathrm{V} \\
U_{C1} &= 65{,}7\,\mathrm{V} \\
U_{C2} &= 25{,}7\,\mathrm{V}
\end{aligned}$$

herauskommt.

## 10.4 Netzwerk aus Kapazitäten




Bestimmen Sie alle Spannungen auf den Kapazitäten! Wie groß sind die gespeicherten Energien?
**Lösung:** Die Kapazitäten vereinfachen (lassen sich zusammenfassen) wie folgt:

$$\begin{aligned}
C_{34} &= \frac{30 \cdot 70}{30 + 70}\,\mu\mathrm{F} = 21\,\mu\mathrm{F} \\
C_{234} &= 30\,\mu\mathrm{F} \\
C_1 &= (20 + 40)\,\mu\mathrm{F} = 60\,\mu\mathrm{F}
\end{aligned}$$

Damit sind dann die Spannungen

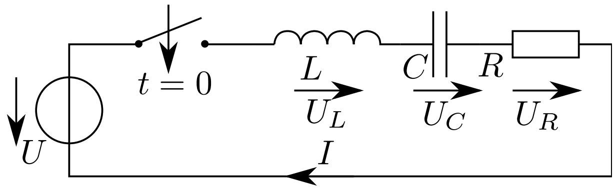
$$
\begin{aligned}
U_1 &= U_0 \frac{C_{234}}{C_{234} + C_1} = 400\,\mathrm{V}\frac{30}{30+60} = 133\frac{1}{3}\,\mathrm{V} \\
U_3 &= 400\,\mathrm{V} - U_1 = 266\frac{2}{3}\,\mathrm{V} \\
U_2 &= U_3 \frac{70}{100} = 186\frac{2}{3}\,\mathrm{V} \\
U_4 &= 266\frac{2}{3}\,\mathrm{V} - 186\frac{2}{3}\,\mathrm{V} = 80\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

Die Energien sind entsprechend über $W = CU^2/2$ zu berechnen:

$$
\begin{aligned}
W_{1a} &= \frac{8}{45}\,\mathrm{J} = 0{,}1778\,\mathrm{J} \\
W_{1a} &= \frac{16}{45}\,\mathrm{J} = 0{,}3556\,\mathrm{J} \\
W_2 &= \frac{8}{25}\,\mathrm{J} = 0{,}32\,\mathrm{J} \\
W_3 &= \frac{196}{375}\,\mathrm{J} = 0{,}5227\,\mathrm{J} \\
W_4 &= \frac{28}{125}\,\mathrm{J} = 0{,}224\,\mathrm{J}
\end{aligned}
$$

# 11 Start und Langzeitbedingungen

## 11.1 RLC in Serie




Bestimmen Sie Strom und alle Spannungen kurze Zeit und lange Zeit nach Schließen des Schalters. Beschreiben Sie den Übergang qualitativ!
**Lösung:** Unmittelbar nach Schließen des Schalters beginnt die Kapazität geladen zu werden, jedoch wird der Stromfluss durch die Induktivität gehemmt. Der Widerstand sorgt in jedem Fall für realistische Verhältnisse.
Unmittelbar nach Schließen des Schalters fällt alle Spannung an der Induktivität ab, es gilt also

$$U_C = U_R = 0, \qquad U_L = U$$
$$I = 0$$

Allerdings wird sich der Strom ändern, denn es gilt

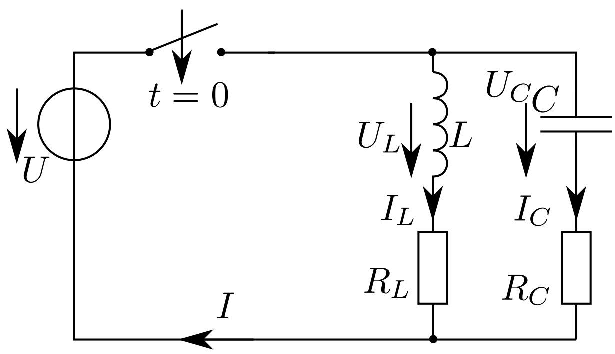
$$\frac{dI}{dt} = \frac{U_L}{L}$$

und so kann schon kurz nach Schließen des Schalters ein Strom fließen, der erstmal nur durch die Induktivität bestimmt wird. Etwas später beginnen $R$ und $C$ in das Geschehen einzugreifen. Nach langer Zeit ist die Kapazität geladen, hierdurch wird kein Strom mehr fließen, es gilt dann also

$$U_R = U_L = 0, \qquad U_C = U,$$
$$I = 0.$$

Änderungsbetrachtungen des Stromes machen keinen Sinn mehr.

## 11.2 LC parallel geschaltet



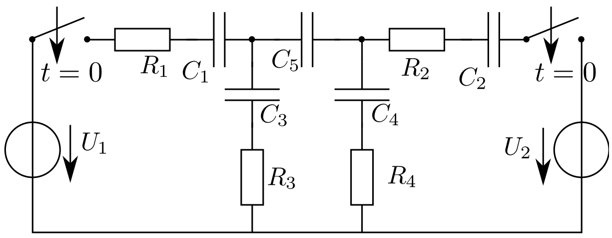
Bestimmen Sie die eingezeichneten Ströme und Spannungen unmittelbar und lange nachdem der Schalter geschlossen wurde.
**Lösung:** Durch die ideale Spannungsquelle zerfällt die Schaltung in die beiden Zweige, die unabhängig von einander betrachtet werden können.
Unmittelbar nach Schließen des Schalters wird die Kapazität alle verfügbare Ladung auf sich ziehen, der Strom durch sie wird durch den Widerstand $R_C$ begrenzt. Umgekehrtes liegt bei der Induktivität vor, hier muss erst der Stromfluss in Gang kommen. Es gilt also

$$
\begin{aligned}
U_C &= 0, & I_C &= \frac{U}{R_C},\\
U_L &= U, & I_L &= 0,\\
I &= \frac{U}{R_C}.
\end{aligned}
$$

Nach langer Zeit fällt dann keine Spannung mehr an der Induktivität ab, dafür aber an der Kapazität, es gilt dann

$$
\begin{aligned}
U_C &= U, & I_C &= 0,\\
U_L &= 0, & I_L &= \frac{U}{R_L},\\
I &= \frac{U}{R_L}.
\end{aligned}
$$

## 11.3 Netzwerk aus Kapazitäten und Widerständen




Die beiden Schalter werden zur gleichen Zeit geschlossen. Bestimmen Sie die Spannungen unmittelbar nach Schließen der Schalter und lange Zeit danach. Die Elemente haben die Werte $U_1 = 10\,\mathrm{V}, U_2 = 20\,\mathrm{V}$, $R_1 = R_2 = 1\,\Omega$, $R_3 = R_4 = 2\,\Omega$, $C_1 = C_2 = 1\,\mu\mathrm{F}$, $C_3 = C_4 = 2\,\mu\mathrm{F}$, $C_5 = 1\,\mu\mathrm{F}$.
**Lösung:** Unmittelbar nach Schließen des Schalters liegt ein reines Widerstandsnetzwerk aus $R_1$ bis $R_4$ vor. Insbesondere $C_5$ verbindet die beiden Netzwerkteile durch großen ermöglichten Stromfluss.
Ein Lösungsansatz geht z.B. über den Überlagerungssatz. Mit $U_1$ wirksam ergibt sich $R_{234}$ als Parallelschaltung der indizierten Widerstände zu

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{R_{234}} &= \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{R_2R_3 + R_2R_4 + R_3R_4}{R_2R_3R_4} = 2\,\frac{1}{\Omega}\\
R_{234} &= 0{,}5\,\Omega.
\end{aligned}
$$

Und damit sind die Spannungsabfälle

$$U_{R31} = U_{R41} = U_{R21} = \frac{0{,}5}{1{,}5} U_1 = 3{,}3333\,\mathrm{V}, \qquad U_{R11} = 6{,}667\,\mathrm{V},$$

wobei die Pfeilrichtung immer von $C_5$ aus zählt. Mit $U_2$ wirksam ergibt sich

$$R_{134} = \frac{R_1R_3 + R_1R_4 + R_3R_4}{R_1R_3R_4} = 2\,\frac{1}{\Omega},$$
$$R_{134} = 0{,}5\,\Omega.$$

Und es ergeben sich die Spannungen

$$U_{R12} = U_{R32} = U_{R42} = \frac{0{,}5}{1{,}5} U_2 = 6{,}6667\,\mathrm{V}, \qquad U_{R22} = 13{,}333\,\mathrm{V},$$

wiederum mit den Pfeilrichtungen von $C_5$ aus.
Überlagert ergibt sich also

$$U_{R1} = U_{R11} - U_{R12} = 0, \qquad U_{R2} = U_{R21} - U_{R22} = -10\,\mathrm{V},$$
$$U_{R3} = U_{R31} + U_{R32} = 10\,\mathrm{V}, \qquad U_{R4} = U_{R41} + U_{R42} = 10\,\mathrm{V}.$$

Die Spannungsabfälle über den Kapazitäten sind alle Null und es wird nochmal hervorgehoben, dass aus Quelle $U_1$ kein Strom entnommen wird.
Lange Zeit nach Schließen des Schalters sind die Kapazitäten geladen und es fließt kein Strom mehr, so dass an keinem der Widerstände eine Spannung abfällt. Es folgt damit ein reines Kapazitäten Netzwerk. Auch hier bietet sich der Überlagerungssatz an. Mit $U_1$ aktiv ergibt sich

$$C_{24} = C_2 + C_4 = 3\,\mu\mathrm{F}, \qquad C_{524} = \frac{C_5C_{24}}{C_5 + C_{24}} = 750\,\mathrm{nF},$$
$$C_{3542} = C_3 + C_{524} = 2{,}75\,\mu\mathrm{F}, \qquad C_{13542} = \frac{C_1C_{3542}}{C_1 + C_{3542}} = 733{,}3\,\mathrm{nF}.$$

darauf befindet sich die Gesamtladung (durch $U_1$) von

$$Q_{ges1} = U_1C_{13542} = 7{,}333\,\mu\mathrm{As}.$$

Und diese teilt sich nun auf mit

$$Q_{11} = Q_{35421} = Q_{ges1} = 7{,}333\,\mu\mathrm{As}$$
$$Q_{31} = \frac{C_3}{C_3 + C_{524}} Q_{ges1} = 5{,}3333\,\mu\mathrm{As}$$
$$Q_{51} = Q_{5241} = Q_{241} = Q_{11} - Q_{31} = 2\,\mu\mathrm{As}$$
$$Q_{41} = \frac{C_4}{C_2 + C_4} Q_{241} = 1{,}3333\,\mu\mathrm{As}$$
$$Q_{21} = \frac{C_2}{C_2 + C_4} Q_{241} = 0{,}6667\,\mu\mathrm{As},$$

jeweils der letzte Index steht für die aktive Quelle. Für die Spannungen wären nicht alle einzelnen Ladungen nötig gewesen, aber es schadet auch nichts. Die Spannungen ergeben sich dann jeweils durch Multiplikation mit der Kapazität und es ist

$$U_{11} = \frac{Q_{11}}{C_1} = 7{,}333\,\mathrm{V}, \qquad U_{21} = U_{41} = \frac{Q_{41}}{C_4} = 0{,}6667\,\mathrm{V},$$
$$U_{31} = \frac{Q_{31}}{C_3} = 2{,}667\,\mathrm{V}, \qquad U_{51} = \frac{Q_{51}}{C_5} = 2\,\mathrm{V},$$

wobei alle Pfeile nach rechts bzw. nach unten zeigen.
Mit $U_2$ aktiv folgt dann

$$C_{13} = C_1 + C_3 = 3\,\mu\mathrm{F}, \qquad C_{513} = \frac{C_5 C_{13}}{C_5 + C_{13}} = 750\,\mathrm{nF},$$
$$C_{4513} = C_4 + C_{513} = 2{,}75\,\mu\mathrm{F}, \qquad C_{24513} = \frac{C_2 C_{4513}}{C_2 + C_{4513}} = 733{,}3\,\mathrm{nF},$$

was natürlich aufgrund der Symmetrie des Netzwerkes genau wie im ersten Fall ist. Weiter ergeben sich dann die einzelnen Ladungen aus der Symmetrie, allerdings bei doppelter Spannung nun doppelt. Das kann aber übergangen werden, weil die gleiche Symmetrie für die Spannungen gilt. Es ist dann:

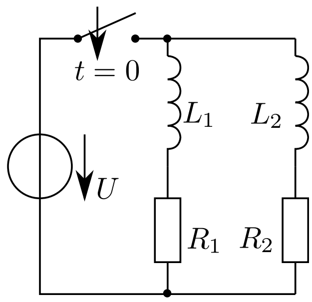
$$U_{22} = 2U_{11} = 14{,}667\,\mathrm{V}, \qquad U_{12} = U_{32} = 2U_{21} = 1{,}3333\,\mathrm{V},$$
$$U_{42} = 2U_{31} = 5{,}3333\,\mathrm{V}, \qquad U_{52} = 2U_{51} = 4\,\mathrm{V},$$

wobei hier allerdings die Pfeile von rechts nach links und von oben nach unten gehen.
Unter Berücksichtigung der Pfeile ergeben sich dann die Spannungen

$$U_{C1} = U_{11} - U_{12} = 6\,\mathrm{V}, \qquad U_{C2} = U_{21} - U_{22} = -14\,\mathrm{V},$$
$$U_{C3} = U_{31} + U_{32} = 4\,\mathrm{V}, \qquad U_{C4} = U_{41} + U_{42} = 6\,\mathrm{V},$$
$$U_{C5} = U_{51} - U_{52} = -2\,\mathrm{V},$$

mit nun wieder allen Pfeilen nach rechts bzw. unten.

## 11.4 Parallele Spulen




Bestimmen Sie die Spannungen und Ströme bzw. mindestens deren Verhältnis bei den gezeigten zwei parallelen Spulen (Induktivität mit ohmschem Verlust) kurz nach Zuschalten der Quelle und nachdem diese Quelle lange eingeschaltet war.

**Lösung:** Wir beginnen mit dem einfach Fall, nämlich dem, wenn die Quelle lange eingeschaltet war, dann sind die Induktivitäten kein Widerstand mehr für den Strom und man erhält sofort

$$U_{L1} = U_{L2} = 0, \qquad U_{R1} = U_{R2} = U,$$
$$I_1 = \frac{U}{R_1}, \qquad I_2 = \frac{U}{R_2},$$
$$I = U\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}.$$

Die Situation beim Einschalten ist etwas unübersichtlicher. Hier gilt natürlich, dass die Zweigspannungen an den Induktitäten abfallen, also

$$U_{L1} = U_{L2} = U, \qquad U_{R1} = U_{R2} = 0$$

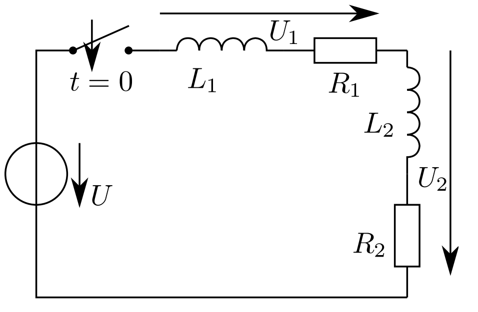
folgt. Und damit kann über die Ströme

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{U}{L_1}, \qquad \frac{dI_2}{dt} = \frac{U}{L_2}$$

ausgesagt werden. Gleichzeitig ergibt sich an dem Knoten

$$I = I_1 + I_2, \qquad \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} = U\left(\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}\right)^{-1},$$
$$\Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{L_2}{L_1}, \qquad \frac{I_1}{I} = \frac{L_2}{L_1 + L_2}, \qquad \frac{I_2}{I} = \frac{L_1}{L_1 + L_2}.$$

## 11.5 Serielle Spulen




Bestimmen Sie die Spannungen über den (realen) Spulen (Induktivität mit ohmschem Verlust) kurz nach Zuschalten der Quelle und nachdem diese Quelle lange eingeschaltet war.

**Lösung:** Wir beginnen mit dem einfach Fall, nämlich dem, wenn die Quelle lange eingeschaltet war, dann sind die Induktivitäten kein Widerstand mehr für den Strom und man erhält sofort

$$U_1 = U\frac{R_1}{R_1 + R_2}, \qquad U_2 = U\frac{R_2}{R_1 + R_2}, \qquad I = \frac{U}{R_1 + R_2}.$$

Kurz nach dem Einschalten fließt zunächst einmal kein Strom, da die Induktivitäten dieses noch nicht zulassen. Über den Widerständen fällt daher keine Spannung ab, aber über den Induktivitäten hat man dann

$$U_1 = U_{L1} = L_1\frac{dI}{dt}, \qquad U_2 = U_{L2} = L_2\frac{dI}{dt},$$

woraus sich zumindest der Anstieg des Stromes bestimmen lässt. Da dieser Anstieg des Stromes im ganzen Kreis gleich sein muss folgt sofort

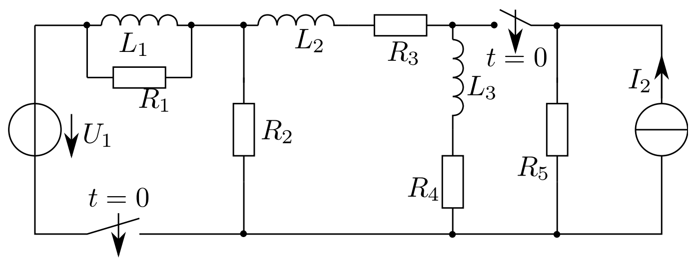
$$\frac{U_1}{L_1} = \frac{U_2}{L_2} \qquad \Leftrightarrow \frac{U_1}{U_2} = \frac{L_1}{L_2}$$

was der ganz normale Spannungsteiler ist, es also auf

$$U_1 = U\frac{L_1}{L_1 + L_2}, \qquad U_2 = U\frac{L_2}{L_1 + L_2}, \qquad I = 0$$

führt.

## 11.6 Netzwerk von Induktivitäten




Bestimmen Sie in dem o.g. Netzwerk die Spannungen und Ströme kurz nach dem gleichzeitigen Schließen der Schalter und lange Zeit danach. In letzterem Fall bestimmen Sie auch die auf den Induktivitäten und insgesamt gespeicherte Energie im System. Die Elementwerte sind $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $L_1 = 1\,\mathrm{mH}$, $R_2 = 100\,\Omega$, $L_2 = 2\,\mathrm{mH}$, $R_3 = 1\,\Omega$, $L_3 = 10\,\mathrm{mH}$, $R_4 = 5\,\Omega$, $R_5 = 10\,\Omega$, $U_1 = 10\,\mathrm{V}$, $I_2 = 1\,\mathrm{A}$.
**Lösung:** Kurz nach dem Schließen der Schalter sind die Induktivitäten sehr hochohmig. So trennt $L_2$ die beiden Netzwerkteile voneinander und links ergibt sich ein Spannungsteiler aus $R_1$,$R_2$, und rechts fließt aller Quellenstrom über $R_5$. So dass sich

$$U_{R5} = U_{L3} = I_2 R_5 = 10\,\mathrm{V}, \qquad U_{R1} = U_{L1} = U_1\frac{R_1}{R_1 + R_2} = 9{,}091\,\mathrm{V},$$

$$U_{R2} = U_1\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0{,}9091\,\mathrm{V} \qquad U_{L2} = -U_{R2} + U_{R5} = -U_1\frac{R_2}{R_1 + R_2} + I_2 R_5 = 9{,}091\,\mathrm{V},$$

$$U_{R3} = U_{R4} = 0.$$

Wenn die Schalter schon lange geschlossen sind, können die Induktivitäten als Kurzschlüsse betrachtet werden, und es ergibt sich das rein resistive Netzwerk ohne $R_1$. Durch „hinsehen“ kann man die Parameter am besten im Überlagerungsverfahren bestimmen. Mit $U_1$ aktiv ist dann

$$U_{21} = U_1 = 10\,\mathrm{V}, \qquad I_{21} = 100\,\mathrm{mA}$$

unnmittelbar und egal was $I_2$ noch macht. Es bleibt dann noch

$$
\begin{aligned}
R_{345} &= R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = 4{,}333\,\Omega, \\
U_{3451} &= U_1 = 10\,\mathrm{V}, \\
I_{3451} &= \frac{U_{3452}}{R_{345}} = 2{,}308\,\mathrm{A}, \\
I_{ges1} = I_{R11} &= I_{3451} + \frac{U_1}{R_2} = 2{,}408\,\mathrm{A}, \\
I_{41} &= I_{3451} \frac{R_5}{R_4 + R_5} = 1{,}539\,\mathrm{A}, \\
I_{51} &= I_{3451} \frac{R_4}{R_4 + R_5} = 0{,}7693\,\mathrm{A}, \\
U_{41} = U_{51} &= I_{41} R_4 = 7{,}693\,\mathrm{V} \\
U_{31} &= U_1 - U_{41} = 2{,}307\,\mathrm{V}.
\end{aligned}
$$

Alle Pfeile gehen nach rechts bzw. unten. Mit $I_2$ aktiv ist dann ($I_2, R_5$ wird in Spannungsquelle umgewandelt)

$$
\begin{aligned}
R_{12} &= 0\,\Omega,\ L_1{,}U_1 \text{überbrücken alles} \\
R_{123} &= R_{12} + R_3 = 1\,\Omega, \\
R_{1234} &= \frac{R_4 R_{123}}{R_4 + R_{123}} = 0{,}8333\,\Omega, \\
R_{12345} &= R_5 + R_{1234} = 10{,}8333\,\Omega.
\end{aligned}
$$

Nun können die Spannungen berechnet werden. Dann ist

$$
\begin{aligned}
U_{42} = U_{32} &= I_2 R_5 \frac{R_{1234}}{R_5 + R_{1234}} = 0{,}7692\,\mathrm{V}, \\
U'_{52} &= I_2 R_5 - U_{42} = 9{,}231\,\mathrm{V}, \\
U_{12} = U_{22} &= 0.
\end{aligned}
$$

Hier gehen alle Pfeile nach links bzw. unten. $U'_{52}$ ist die Spannung um umgewandelten Widerstand $R_5$. an $R_5$ in Stromquellenform fallen $U_{52} = U_{42} = 0{,}7692\,\mathrm{V}$ ab.
Insgesamt hat man dann

$$
\begin{aligned}
U_{R1} = U_{L1} &= 0, \\
U_{R2} &= U_1 = 10\,\mathrm{V}, \\
U_{R3} &= U_{31} - U_{32} = 1{,}538\,\mathrm{V}, \\
U_{R4} = U_{R5} &= U_{41} + U_{42} = 8{,}462\,\mathrm{V},
\end{aligned}
$$

für die Spannungen und für die Ströme hat man

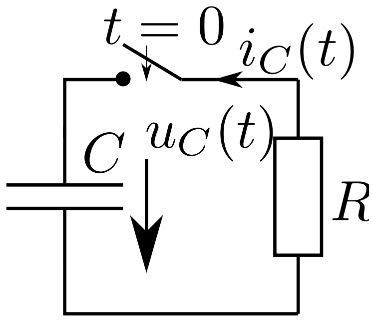
$$\begin{aligned}
I_{R2} &= \frac{U_{R2}}{R_2} = 100\,\mathrm{mA}, \\
I_{R3} = I_{L2} &= 1{,}538\,\mathrm{A}, \\
I_{L1} &= I_{R2} + I_{R3} = 1{,}638\,\mathrm{A}, \\
I_{R1} &= 0, \\
I_{R4} = I_{L3} &= 1{,}692\,\mathrm{A}, \\
I_{R5} &= 0{,}8462\,\mathrm{A}.
\end{aligned}$$

Die gespeicherten Energien ergeben sich jeweils zu $W = \frac{1}{2}LI^2$ und damit ist dann

$$\begin{aligned}
W_1 &= 1{,}341\,\mathrm{mJ}, \\
W_2 &= 2{,}365\,\mathrm{mJ}, \\
W_3 &= 14{,}31\,\mathrm{mJ}, \\
W_{ges} &= W_1 + W_2 + W_3 = 18{,}02\,\mathrm{mJ}.
\end{aligned}$$

# 12 Schaltvorgänge

## 12.1 Entladung einer Kapazität




Eine Kapazität mit $C = 1\,\mu\mathrm{F}$ ist auf die Spannung $U_C = 100\,\mathrm{V}$ aufgeladen. Die Kapazität wird über einen Widerstand $R = 1\,\mathrm{k}\Omega$ entladen, indem zum Zeitpunkt $t = 0$ der Schalter geschlossen wird.

(a) Geben Sie die Spannung $u_C(t)$ für $t \geq 0$ an!

(b) Berechnen Sie den im Kreis fließenden Strom $i_C(t)$ für $t \geq 0$!
**Lösung:** Der Maschenumlauf ergibt die Differentialgleichung

$$u_C(t) + u_R(t) = 0$$
$$\frac{1}{C} \times \int_0^t i(t')\,dt' + Ri = 0$$
$$\Rightarrow i + RC\frac{di}{dt} = 0$$

wir gelöst von

$$i(t) = I_0 \times e^{at}$$

und damit wird aus der DLG eine algebraische Gleichung mit

$$1 + RCa = 0, \qquad \Leftrightarrow a = -\frac{1}{RC} = -1\,\frac{1}{\mathrm{ms}}$$

Und für die Spannung folgt (man braucht das für die Anfangsbedingung)

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \times \int_0^t i(t')\,dt' = -RI_0 e^{-t/(RC)}$$

und als Anfangsbedingung natürlich $u_C(t = 0) = U_0$. Damit ist $I_0 = 100\,\mathrm{mA}$ und insgesamt

$$u_C(t) = 100\,\mathrm{V} \times e^{-t/1\,\mathrm{ms}}$$
$$i_C(t) = -100\,\mathrm{mA} \times e^{-t/1\,\mathrm{ms}}$$

## 12.2 Isolierter Kondensator

Ein geladener Elektrolytkondensator mit der Kapazität $C = 25\,\mu\mathrm{F}$ wird isoliert aufgestellt. Nach 10 Minuten ist die Spannung um 10 % vom Anfangswert abgesunken. Wie groß ist der Leckwiderstand des Kondensators?

(Anmerkung: Da jedes Dielektrikum auch eine sehr kleine Leitfähigkeit besitzt, tritt bei geladenen Kondensatoren durch das Dielektrikum hindurch ein Leitungsstrom auf, den man als Leckstrom bezeichnet. Im Ersatzschaltbild kennzeichnet man diese Erscheinung durch die Parallelschaltung einer idealen Kapazität mit einem ohmschen Widerstand, dem sogenannten Leck- oder Verlustwiderstand. Er bedingt die Entladung eines aufgeladenen, isolierten Kondensators.)

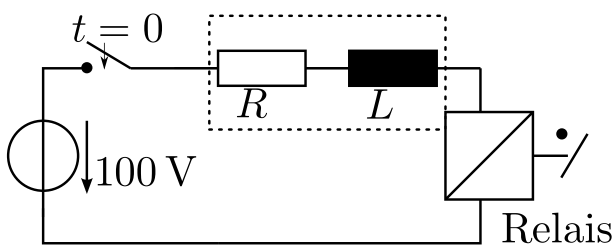
**Lösung:** Das Ersatzschaltbild ist hier die Parallelschaltung der bekannten Kapazität mit dem unbekannten Widerstand $R$. Die Entladefunktion ist damit

$$u_C(t) = U_0 \times e^{-t/(RC)}$$

und das zu zwei unterschiedlichen Zeiten ist dann

$$\begin{aligned}
u_C(t_1) &= U_0 \times e^{-t_1/(RC)} \\
u_C(t_2) &= U_0 \times e^{-t_2/(RC)} \\
\Rightarrow \frac{u_C(t_1)}{u_C(t_2)} &= e^{(t_2-t_1)/(RC)} = \frac{1}{0{,}9} \Leftrightarrow t_2 - t_1 && = RC \times (-\ln 0{,}9) \\
\Leftrightarrow R &= \frac{t_2 - t_1}{C \times (-\ln 0{,}9)} = \frac{600\,\mathrm{s}}{25\,\mu\mathrm{F} \times (-\ln 0{,}9)} = 228\,\mathrm{M}\Omega
\end{aligned}$$

## 12.3 Ein Relais




In der angegebenen Relaisschaltung wird der Schalter zum Zeitpunkt $t = 0$ geschlossen. Die Wicklung des Relais ist durch den Widerstand $R = 100\,\Omega$ und die Induktivität $L = 1\,\mathrm{H}$ charakterisiert. Das Relais zieht bei einem Strom von $I_a = 0{,}64\,\mathrm{A}$ an.

Welche Zeit $\Delta t$ verstreicht demnach zwischen Umlegen des Schalters und dem Schließen des Relais? Geben Sie das Ergebnis in Zahlen und als Formel an!

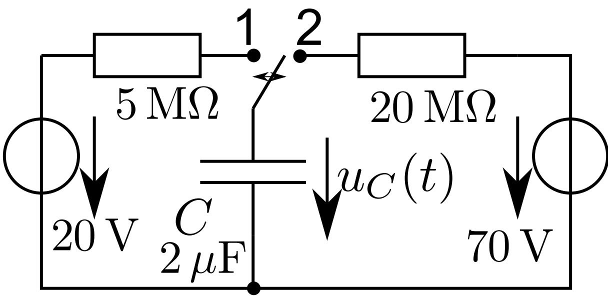
**Lösung:** Der Stromverlauf beim Einschalten einer Spannungsquelle an eine Induktivität (ggf. mit Verlusten) ist

$$i(t) = I_0 \left(1 - e^{-t/(L/R)}\right)$$

Mit einem Eingangsstrom von $I_0 = U/R = 1\,\mathrm{A}$ zieht das Relais bei $i(t_1) = 0{,}64\,\mathrm{A}$ an, also

$$\begin{aligned} i(t_1) &= I_0\left(1 - e^{-t_1/(L/R)}\right) \\ \Leftrightarrow e^{-t_1/(L/R)} &= \frac{I_0 - i(t_1)}{I_0} \\ \Leftrightarrow t_1 &= -\frac{L}{R} \times \ln\left(\frac{I_0 - i(t_1)}{I_0}\right) \\ &= -10\,\mathrm{ms} \times \ln 0{,}36 = 10{,}22\,\mathrm{ms} \end{aligned}$$

### 12.4 Umschalten einer Kapazität




Der Schalter in o.g. Schaltung befindet sich seit langer Zeit in Position 1, bevor er zum Zeitpunkt $t = 0$ für die Dauer von 30 s in Position 2 umgelegt wird, um dann wieder in Position 1 zurückgeschaltet zu werden.

(a) Wie sieht der Verlauf von $u_C(t)$ für $t \geq 0$ aus?
**Lösung:** Zunächst ist die Kapazität auf $U_0 = 20\,\mathrm{V}$ aufgeladen, wenn der Schalter umgelegt wird. Der Maschenumlauf in der rechten Masche ist dann

$$U = u_C(t) + u_R(t)$$

mit

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \times \left(\int_0^t i(t')\,dt' + Q_0\right)$$

$Q_0 = CU_0 = 4 \times 10^{-5}$ As ist die Anfangsladung. Damit ergibt sich die DGL

$$\begin{aligned} U &= Ri(t) + \frac{1}{C} \times \left(\int_0^t i(t')\,dt' + Q_0\right) \\ \Rightarrow U - U_0 &= Ri(t) + \frac{1}{C} \times \int_0^t i(t')\,dt' \end{aligned}$$

die mit dem Ansatz

$$i(t) = I_0 e^{-t/(RC)}$$

gelöst wird. Aus der Anfangsbedingung ergibt sich dann

$$I_0 = \frac{U - U_0}{R}$$

und mit Zahlenwerten ist

$$\begin{aligned} i(t) &= 2{,}5\,\mu\mathrm{A}\, e^{-t/40\,\mathrm{s}} \\ u_c(t) &= 20\,\mathrm{V} + 50\,\mathrm{V}\left(1 - e^{-t/40\,\mathrm{s}}\right) \\ &= 70\,\mathrm{V} - 50\,\mathrm{V} e^{-t/40\,\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Nach 30 s wird nun zurückgeschaltet. Zu diesem Zeitpunkt liegt an der Kapazität die Spannung

$$u_c(30\,\mathrm{s}) = 46{,}38\,\mathrm{V}$$

an. Die Zeitkonstante wird $RC = 10\,\mathrm{s}$ und im Umschaltmoment fließt somit ein Strom von

$$i_c(30\,\mathrm{s}) = \frac{u_c(30\,\mathrm{s})}{5\,\mathrm{M}\Omega} = 9{,}276\,\mu\mathrm{A}.$$

Der Spannungsverlauf nach dieser Zeit ergibt sich also zu

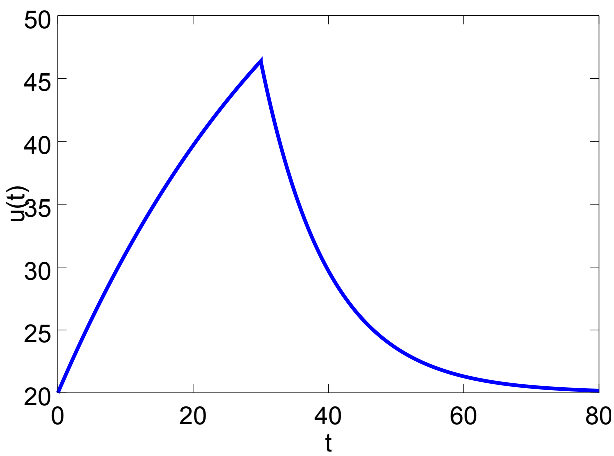
$$\begin{aligned} u_c(t) &= 20\,\mathrm{V} + (u_c(30\,\mathrm{s}) - 20\,\mathrm{V}) \times e^{-t'/10\,\mathrm{s}} \\ &= 20\,\mathrm{V} + 26{,}38\,\mathrm{V} \times e^{-t'/10\,\mathrm{s}} \end{aligned}$$

wobei als Abkürzung eine verschobene Zeit $t' = t - 30\,\mathrm{s}$ eingeführt wurde.

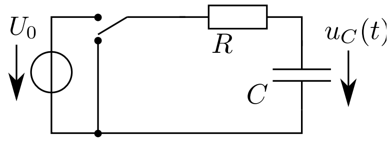
(b) Welche Spannungen $u_c(t)$ liegen bei $t_1 = 5\,\mathrm{s}$ und $t_2 = 40\,\mathrm{s}$ an der Kapazität an?
**Lösung:**

$$\begin{aligned} u_c(t_1) &= 25{,}88\,\mathrm{V} \\ u_c(t_2) &= 29{,}71\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

(c) Zeichnen Sie den Verlauf von $u_C(t)$ für $0 \le t \le 80\,\mathrm{s}$!
**Lösung:**



### 12.5 Umschalten am Kondensator

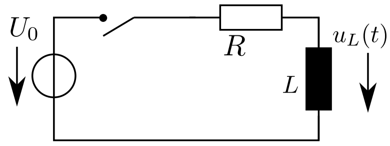



Die Kapazität ist bei Schalterstellung in obiger Position lange Zeit aufgeladen worden und wird nun durch umlegen des Schalters entladen.
Geben Sie alle Ströme und Spannungen bis zu $t = 5RC$ an und zeichnen Sie sie in ein Diagramm (mit ggf. zwei Achsenbeschriftungen)!
**Lösung:** Das ist nur die normale Entladekurve mit

$$u_c(t) = U_0 \times e^{-t/(RC)}$$
$$i(t) = \frac{U_0}{R} \times e^{-t/(RC)}$$

Auf die Zeichnung wird hier verzichtet, das sollte jeder selber können.

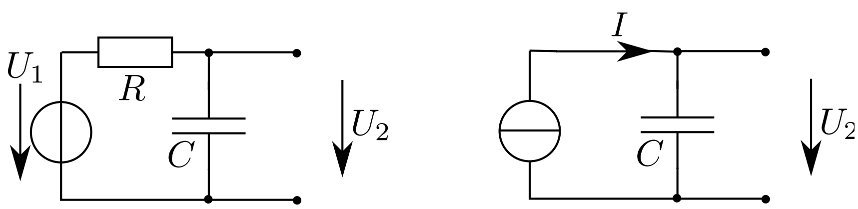
### 12.6 Umschalten an der Spule




Die zunächst ungeladene Induktivität wird durch Schließen des Schalters bei $t = 0$ geladen.
Geben Sie alle Ströme und Spannungen bis zu $t = 5L/R$ an und zeichnen Sie sie in ein Diagramm (mit ggf. zwei Achsenbeschriftungen)!
**Lösung:** Das ist nun die einfache Einschaltbedingung der Spule mit

$$u_L(t) = U_0 \times e^{-t/(L/R)}$$
$$i(t) = \frac{U_0}{R} \times \left(1 - e^{-t/(L/R)}\right)$$

### 12.7 Kondensator an verschiedenen Quellen




An eine RC-Schaltung wie oben gezeigt werden im ungeladenen Zustand verschiedene Quellen angelegt, geben Sie jeweils die Spannungsverläufe an!

(a) Eine konstante Gleichspannung $U_1 = \text{const}$.
**Lösung:** Dieses ist der übliche e-Funktionsverlauf mit

$$u_C(t) = U_1 \left(1 - e^{-t/(RC)}\right)$$

(b) Eine linear ansteigende Spannung mit $U_1 = U_0 \times t/T$ mit willkürlichem $T$.
**Lösung:** Hierzu ist zunächst die Differentialgleichung aufzustellen. Danach ist

$$\begin{aligned} U_1 &= U_R + U_C \\ U_0 \frac{t}{T} &= iR + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\,dt' \\ \Rightarrow U_0 \frac{1}{T} &= R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} \end{aligned}$$

Die Lösung der DGL besteht aus einem inhomogenen Anteil, der wieder aus der e-Funktion besteht, und einem Ansatz von Typ der rechten Seite, es ist also für den Strom $i$

$$\begin{aligned} i(t) &= I_0 e^{-ct} + I_1 \\ \frac{di}{dt} &= -cI_0 e^{-ct}. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die obige DGL erhält man also

$$\begin{aligned} U_0 \frac{1}{T} &= R(-cI_0 e^{-ct}) + \frac{I_0 e^{-ct} + I_1}{C} \\ \Rightarrow 0 &= R(-cI_0 e^{-ct}) + \frac{I_0 e^{-ct}}{C} & U_0 \frac{1}{T} &= \frac{I_1}{C} \\ \Leftrightarrow c &= \frac{1}{RC} & I_1 &= \frac{U_0 C}{T} \end{aligned}$$

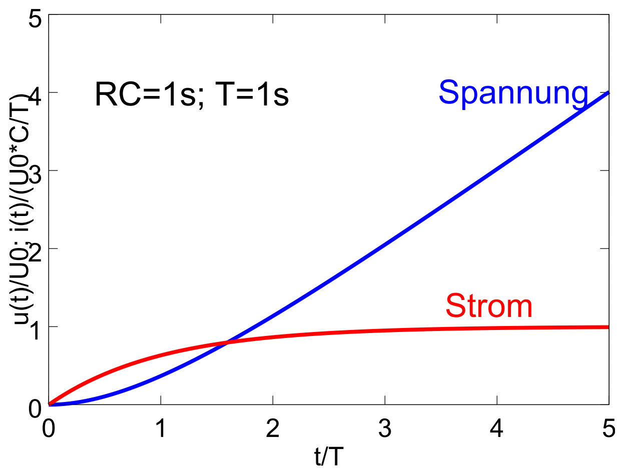
Mit der Forderung, dass bei $t = 0$ noch kein Strom fließt muss dann

$$\begin{aligned} i(t=0) &= I_0 + I_1 = 0 \\ \Leftrightarrow I_0 &= -I_1 = -\frac{U_0 C}{T} \end{aligned}$$

gelten und das Endergebnis ist

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{U_0 C}{T}\left(1 - e^{-t/(RC)}\right) \\ u_C(t) &= \frac{U_0}{T}\left(t + RCe^{-t/(RC)} - RC\right) \end{aligned}$$

Die Verläufe von Strom und Spannung ergeben sich wie dargestellt (Beispielhafte Wahl der Parameter)



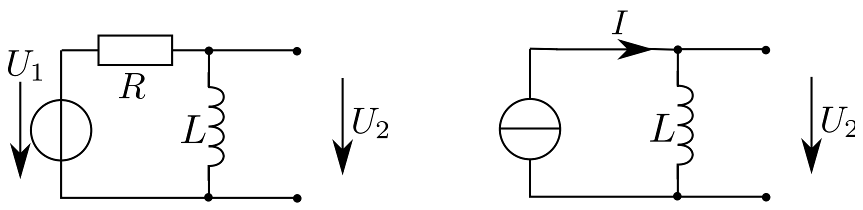

(c) Die Spannungsquelle mit Innenwiderstand $U_1$ mit $R$ wird durch eine ideale Stromquelle mit konstantem Strom ersetzt.
**Lösung:** Der konstante Strom liefert dann immer Ladung nach und die Spannung steigt linear an, also

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt \\ &= \frac{it}{C} \end{aligned}$$

(d) Die Spannungsquelle mit Innenwiderstand $U_1$ mit $R$ wird durch eine ideale Stromquelle linear ansteigendem Strom ($I = I_0 \times t/T$) ersetzt.
**Lösung:** Der konstante Strom liefert dann immer mehr und mehr Ladung nach und die Spannung steigt nun quadratisch an.

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt \\ &= \frac{1}{C}\int_0^t I_0 \frac{t}{T}\,dt = \frac{I_0 t^2}{2CT} \end{aligned}$$

## 12.8 Spule an verschiedenen Quellen




An eine LR-Schaltung wie oben gezeigt werden im ungeladenen Zustand verschiedene Quellen angelegt, geben Sie jeweils die Spannungsverläufe an!

(a) Eine Konstante Gleichspannung $U_1 = \text{const.}$
**Lösung:** Dieses ist die normale abfallende e-Funktion mit

$$u_L(t) = U_1 \times e^{-tR/L}$$

(b) Eine linear ansteigende Spannung mit $U_1 = U_0 \times t/T$ mit willkürlichem $T$.
**Lösung:** Hier muss nun sinnvollerweise die komplette DGL aufgestellt werden. Es ist dann

$$U_1 = U_R + U_L = Ri + L\frac{di}{dt} = \frac{U_0}{T}t$$

Es ist für den homogenen Lösungsanteil der übliche Ansatz mit

$$i_h(t) = I_e \times e^{-tR/L}$$

zu machen und daraus folgt als Beweis, dass

$$\begin{aligned} RI_e \times e^{-tR/L} - \frac{R}{L}LI_e \times e^{-tR/L} &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= 0 \end{aligned}$$

richtig ist.

Der homogenen Lösung ist der partikuläre hinzuzufügen mit

$$\begin{aligned} i_p(t) &= i_0 + i_1 t \\ \Rightarrow \frac{di_p(t)}{dt} &= i_1 \end{aligned}$$

und das in die DGL eingesetzt führt auf

$$\begin{aligned} \frac{U_0}{T}t &= R\left(i_0 + i_1 t\right) + Li_1 \\ \Rightarrow 0 &= Ri_0 + Li_1, & \frac{U_0}{T}t &= Ri_1 t \\ \Leftrightarrow i_0 &= -\frac{L}{R}i_1, & i_1 &= \frac{U_0}{RT} \\ i_0 &= -\frac{L}{R} \times \frac{U_0}{RT} \end{aligned}$$

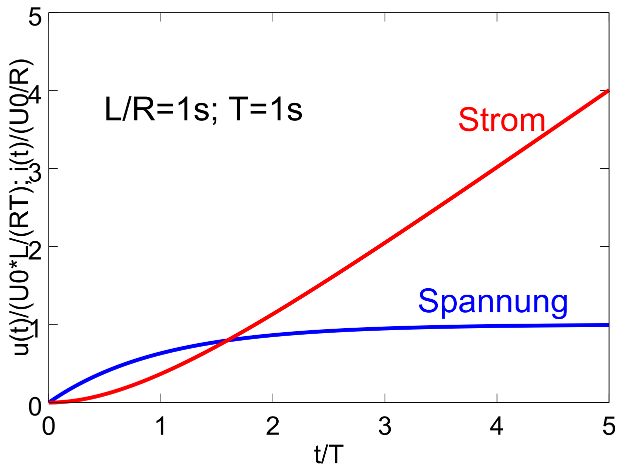
Weiterhin ist die Anfangsbedingung zu beachten, nach der bei $t = 0$ noch kein Strom fließt, also

$$\begin{aligned} i(t) &= i_h(t) + i_p(t) \\ \Rightarrow 0 = i(t = 0) &= i_h(t = 0) + i_p(t = 0) \\ \Leftrightarrow 0 &= I_e + i_0 \\ \Leftrightarrow I_e &= -i_0 = \frac{L}{R} \times \frac{U_0}{RT} \\ \Rightarrow i(t) &= \frac{U_0}{RT}\left(\frac{L}{R} \times e^{-tR/L} - \frac{L}{R} + t\right). \end{aligned}$$

Die Spannung ist dann

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = \frac{U_0 L}{RT}\left(1 - e^{-tR/L}\right)$$

Die Verläufe von Strom und Spannung ergeben sich wie dargestellt (Beispielhafte Wahl der Parameter)



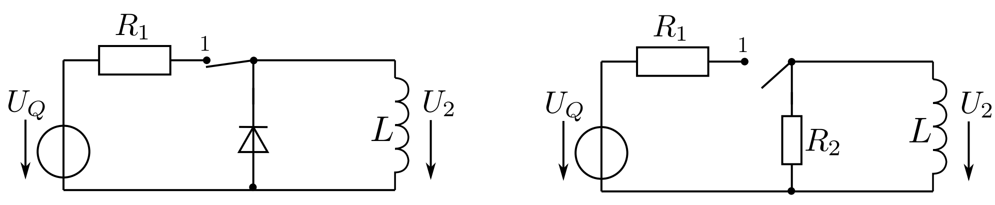

(c) Die Spannungsquelle mit Innenwiderstand $U_1$ mit $R$ wird durch eine ideale Stromquelle mit konstantem Strom ersetzt.
**Lösung:** Hiermit wird dann (durch einen unendlichen Spannungsstoß am Anfang) der Strom konstant auf $I_0$ getrieben, die Spannung über die Induktivität ist nach dem Stoß wieder Null.

(d) Die Spannungsquelle mit Innenwiderstand $U_1$ mit $R$ wird durch eine ideale Stromquelle linear ansteigendem Strom ($I = I_0 \times t/T$) ersetzt.
**Lösung:** Hier gilt

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = L\frac{I_0}{T}$$

die Spannung steigt kontinuierlich an.

### 12.9 Ladevorgänge, 7 Punkte




Der Schalter wird zum Zeitpunkt $t = 0$ in die Position “1” gelegt, es wird dadurch die zunächst stromlose Spule $L$ geladen. Nach einer Zeit $t = t_1$ wird der Schalter umgelegt, so dass die Spule $L$ über die Diode entladen wird. Das linke Schaltbild gibt ein mögliches Prinzip an, während im Rechten die Diode durch ihren Widerstand $R_2$ ersetzt wurde. Dieses rechte Schaltbild ist ggf. zur Berechnung zu verwenden.

(a) Geben Sie den formelmäßigen Zusammenhang für Strom und Spannung durch bzw. an der Induktivität $L$ für den Zeitraum $0 < t < t_1$ an!
**Lösung:** Das ist die einfache Ladekurve, so dass die Spannung

$$I = \frac{U_Q}{R_1}\left(1 - e^{-t/(L/R_1)}\right)$$

beträgt. Die Spannung ist dann

$$U_2 = U_Q \times e^{-t/(L/R_1)}$$

**Bewertung: (2) Punkte für die richtigen Formeln**

Im nun folgenden sind die Werte $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 10\,\Omega$ und $L = 1\,\mathrm{mH}, U_Q = 10\,\mathrm{V}$ anzunehmen.

(b) Berechnen Sie die Spannung $U_2$ an $L$ nach $t = t_1 = 2\,\mathrm{ms}$ vor Öffnen des Schalters!
**Lösung:** Die Zeitkonstante ist genau $\frac{L}{R_1} = 1\,\mathrm{ms}$. Daher beträgt die Spannung $U_1 = 10\,\mathrm{V} \times \frac{1}{e^2} = 1{,}353\,\mathrm{V}$. Damit ist $U_2 = 8{,}646\,\mathrm{V}$.
**Bewertung: (1) Punkt**

(c) Bei $t_1 = 2\,\mathrm{ms}$ wird der Schalter umgelegt. Geben Sie die Spannung $U_2$ im Moment direkt nach dem Umschalten an! (Das rechte Schaltbild ist zu verwenden)
**Lösung:** Durch die Spule fließt nun ein Strom von

$$I(t_1) = \frac{U_Q}{R_1} \times \left(1 - \frac{1}{e^2}\right) = 8{,}646\,\mathrm{A}$$

Der zunächst weiter fließen will. Dieser verursacht daher über einen Widerstand von $R_2 = 10\,\Omega$ einen Spannungsimpuls von $U_2 = -86{,}46\,\mathrm{V}$
**Bewertung: (1) Punkt.**

(d) Geben Sie nun den Verlauf der Spannung $U_2$ für $t > t_1$ an!
**Lösung:** Auch dieses ist wieder eine e-Funktion. Nun aber mit einer anderen Zeitkonstante $\tau = L/R_2 = 100\,\mu\mathrm{s}$:

$$U_2 = 86{,}46\,\mathrm{V} \times e^{-(t-t_1)/100\,\mu\mathrm{s}}$$

**Bewertung: (1) Punkt.**

(e) Welche Energie wurde in $R_2$ insgesamt umgesetzt, wenn der Schalter nun für lange Zeit in der geöffneten Position verbleibt?
**Lösung:**

Das einfachste ist zu berechnen, welche Energie die Spule zum Zeitpunkt des Umschaltens hatte. Diese Energie wird dann komplett in $R_2$ umgesetzt.

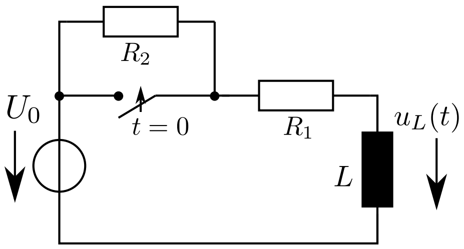
Der Aufladevorgang auf $I = 8{,}646\,\mathrm{A}$ hat

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = 38{,}12\,\mathrm{mJ}$$

auf die Spule gebracht. Dieses wurde komplett in $R_2$ versenkt.

**Bewertung: (2) Punkt**

### 12.10 Ladevorgänge, 10 Punkte




Mit geöffnetem Schalter treibt die Spannungsquelle schon für lange Zeit einen Strom durch $R_1$,$R_2$,$L$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter geschlossen.

(a) Geben Sie Strom und Spannung an allen Elementen vor Schließen des Schalters an! (2 Punkte)
**Lösung:** Hier ist dann

$$I = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

$$U_L = 0, \qquad U_1 = \frac{U_0 R_1}{R_1 + R_2}, \qquad U_2 = \frac{U_0 R_2}{R_1 + R_2}$$

**(je 0,5 Punkte pro Ergebnis)**

(b) Nun wird der Schalter geschlossen und damit wird $R_2$ überbrückt. Geben Sie alle Ströme und Spannungen nach nun wiederum unendlich langer Zeit an! (1 Punkt)
**Lösung:** Hier fließt nun der Strom $I = U/R_1$ und die Spannungen sind

$$U_L = 0, \qquad U_1 = U_0.$$

**(1 Punkt)**

(c) (*) Nun wird der Schalter geschlossen und damit wird $R_2$ überbrückt. Geben Sie den Spannungsverlauf $u_l(t)$ für $t \geq 0$ an und zeichnen Sie ihn! (4 Punkte)
**Lösung:** Aus dem Maschenumlauf folgt sofort

$$u_1 + u_L = U_0$$
$$iR_1 + L\frac{di}{dt} = U_0$$

**(1 Punkt)**

Die DGL ist lösbar mit dem Ansatz

$$i(t) = I_0 \times e^{-t/(L/R_1)} + I_1$$

**(1 Punkt)**

Es fehlt die Anfangsbedingung, die ist aber über den Strom bei $t = 0$ mit $I_0 + I_1 = \frac{U_0}{R_1+R_2}$ gegeben und nach unendlich langer fließt fließt der Strom $I_1 = \frac{U_0}{R_1}$, womit dann

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{U_0}{R_1 + R_2} - \frac{U_0}{R_1} = U_0 \frac{R_1 - R_1 - R_2}{R_1(R_1 + R_2)} \\ &= -U_0 \frac{R_2}{R_1(R_1 + R_2)} \end{aligned}$$

folgt.

Die Spannung errechnet sich nun aus

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = \frac{U_0 R_2}{R_1 + R_2} \times e^{-t/(L/R_1)}$$

**(1 Punkt)**

Es handelt sich hier um eine abfallende $e - Funktion$ **(1 Punkt für die Zeichnung)**

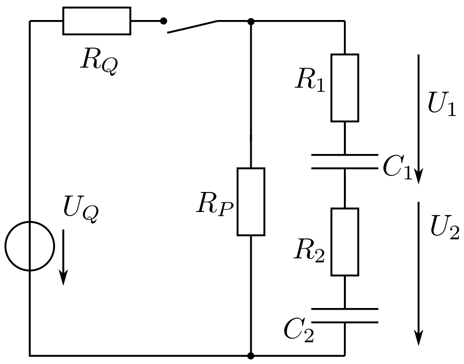
(d) Die Induktivität habe einen Wert von $L = 1\,\mathrm{H}$ und werde nach nun wiederum sehr langer Zeit mit einem Draht (mit Widerstand) überbrückt (nicht im Schaltbild gezeigt). Sie können den Rest der Schaltung $U_0$,$R_1$,$R_2$ vernachlässigen. Beschreiben Sie in mindestens einem vollständigen Satz (ggf. mit Skizze), wie sich der Strom durch den Überbrückungsdraht verhält. (2 Punkte)
**Lösung:** Der Strom wird zunächst für eine unendlich kurze Zeit unverändert nun durch den Draht getrieben. Danach fällt er nach Maßgabe des Widerstand des Drahtes und der Induktivität in Form einer e-Funktion mit negativem Exponenten. **(2 Punkte)**

(e) Nach $t' = 10\,\mathrm{s}$ nach dem Überbrückungsvorgang ist der Strom auf die Hälfte abgefallen. Wie groß ist der Widerstand des Drahtes? (1 Punkt)
**Lösung:** Es gilt also hier

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= e^{-t'/(L/R)} \\ \Leftrightarrow t'R/L &= \ln(2) \\ \Leftrightarrow R &= \frac{L}{t'} \ln(2) \approx 0{,}07\,\Omega. \end{aligned}$$

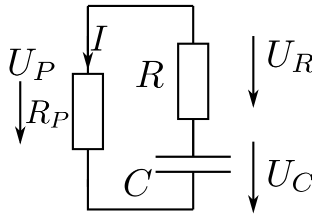
**(1 Punkt)**

## 12.11 Ladevorgänge, 14 Punkte



Zwei Kondensatoren (Kapazitäten mit Innenwiderständen $C_1$, $R_1$ und $C_2, R_2$) werden bei geschlossenen Schalter geladen. Zunächst seien die Kapazitäten ungeladen.

(a) Ersetzen Sie die zwei Kondensatoren aus Kapazitäten mit Innenwiderständen $C_1$, $R_1$ und $C_2, R_2$ durch einen zusammengefassten mit $R$ und $C$, geben Sie die Ersatzschaltung und natürlich $R$ und $C$ an! (3 Punkte)
**Lösung:** Das ist die Reihenschaltung




mit

$$
\begin{aligned}
R &= R_1 + R_2 \\
C &= \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}
\end{aligned}
$$

**Bewertung: 1 Punkt für jeden Wert und eines für das ESB**

(b) Auf welche Spannung ist $C$ nachdem der Schalter lange schlossen war aufgeladen? (1 Punkt)
**Lösung:**
Das ist sicherlich

$$U_C = U_Q \frac{R_P}{R_Q + R_P}$$

**Bewertung: 1 Punkt**

(c) Der Schalter wird nun geöffnet. Geben Sie Strom und Spannung über bzw. durch $R_P$ an! Zeichnen Sie in ein Schaltbild die beteiligten Elemente und Spannungen und Ströme so ein, dass die Pfeilrichtung zu positiven Werten führt. Sie können die oben eingeführten Abkürzungen $R$ und $C$ verwenden. (3 Punkte)
**Lösung:** Das ist einfach die Entladung der Kapazität $C$ über $R$ und $R_P$ mit

$$U_C(t) = U_Q \frac{R_P}{R_Q + R_P} e^{-t/(C(R+R_P))}$$

Und damit sind Strom und Spannung an bzw. durch $R_P$

$$
\begin{aligned}
U_P &= U_Q \frac{R_P}{R_Q + R_P} \times \frac{R_P}{R + R_P} e^{-t/(C(R+R_P))} \\
I_P &= U_Q \frac{R_P}{R_Q + R_P} \times \frac{1}{R + R_P} e^{-t/(C(R+R_P))}
\end{aligned}
$$

**Bewertung: 1 Punkt für jeden Wert und einen für die richtigen Pfeile im ESB.**

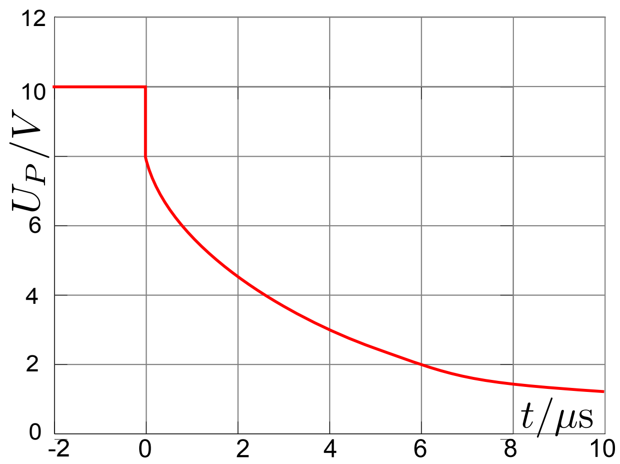
(d) Mit $R_1 = R_2 = 0{,}5\,\Omega$, $R_P = R_Q = 4\,\Omega$, $C_1 = C_2 = 2\,\mu\text{F}$, $U_Q = 20\,\text{V}$ zeichnen Sie den Spannungsverlauf über $R_P$ von $1\,\mu\text{s}$ vor bis $10\,\mu\text{s}$ nach öffnen des Schalters! (Keine Folgefehler! Wenn Sie obigem Ergebnis misstrauen, Rechnen Sie mit Zahlen nochmals) (3 Punkte)

**Lösung:** Es ergeben sich:

$$R = 1\,\Omega, \qquad C = 1\,\mu\text{F}$$

$$U_P(t-) = 10\,\text{V} \qquad U_P(t+) = U_P(t-)\frac{R_P}{P + R_R} = 8\,\text{V}$$

$$\tau = C(R + R_P) = 5\,\mu\text{s}$$




**Bewertung: 3 Punkte für den richtigen Graphen und auch richtige Werte und Skalierungen.**

(e) Geben Sie allgemein und formelmäßig die Spannungen $U_1$ und $U_2$ unmittelbar nach Schließen des Schalters und nachdem der Schalter für sehr sehr lange Zeit geschlossen war an! (4 Punkte)

**Lösung:** Unmittelbar nach Schließen des Schalters sind $C_1$ und $C_2$ Kurzschlüsse und nur die Widerstände bestimmen das Geschehen. Es liegt dann der Spannungsteiler mit

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 &= U_Q \left( \frac{\frac{R_P(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_P}}{R_Q + \frac{R_P(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_P}} \right) \\ &= U_Q \frac{R_P(R_1 + R_2)}{R_Q(R_1 + R_2 + R_P) + R_P(R_1 + R_2)} \end{aligned}$$

vor und damit ist dann

$$\begin{aligned} U_1 &= U_Q \frac{R_P R_1}{R_Q(R_1 + R_2 + R_P) + R_P(R_1 + R_2)} \\ U_2 &= U_Q \frac{R_P R_2}{R_Q(R_1 + R_2 + R_P) + R_P(R_1 + R_2)} \end{aligned}$$

.

Nach langer Zeit nehmen die Kapazitäten keine Ladung mehr auf, durch sie fließt kein Strom mehr. Es greift erstmal der Spannungsteiler aus $R_Q$ und $R_P$

$$U_1 + U_2 = U_Q \frac{R_P}{R_Q + R_P}$$

verkettet mit der Spannungsteilung durch $C_1$ und $C_2$ wodurch sich dann

$$U_1 = U_Q \frac{C_2}{C_1 + C_2} \frac{R_P}{R_Q + R_P}$$
$$U_2 = U_Q \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{R_P}{R_Q + R_P}$$

ergibt.

**je 1Punkte pro Ergebnis**