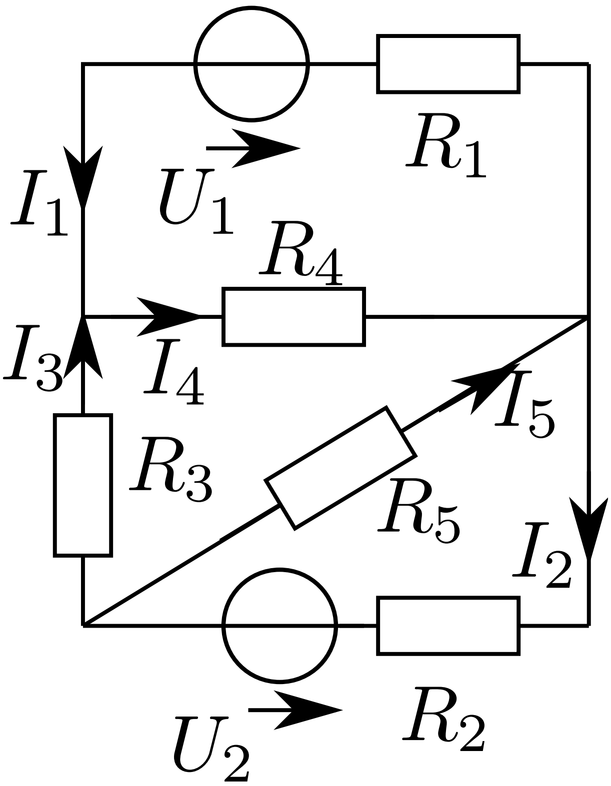
Grundlagen der Elektrotechnik I
Duale Hochschule Karlsruhe
Dozent: Prof. Dr.-Ing. Gerald Oberschmidt

6 Maschenstrom- und Überlagerungsverfahren

6.1 Überlagerungsverfahren oder Maschenstromanalyse

Bestimmen Sie ein der im Bild gegebenen Schaltung alle Ströme und Spannungen nach dem Überlagerungsverfahren und nach dem Maschenstromverfahren.
Die Elementwerte sind

$U_1 = 9\,\mathrm{V}$, $U_2 = 12\,\mathrm{V}$, $R_1 = 2{,}4\,\Omega$
$R_2 = 1\,\Omega$, $R_3 = 2\,\Omega$, $R_4 = 3\,\Omega$, $R_5 = 5\,\Omega$



...
Lösung:
Überlagerungsverfahren
Für die Berechnung des Einflusses der ersten Quelle bestimmen wir zunächst die zusammenhän-

genden Widerstände

$$R_{25} = \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5} = \frac{5}{6}\,\Omega$$
$$R_{325} = R_3 + R_{25} = \frac{17}{6}\,\Omega$$
$$R_{4325} = \frac{R_4 R_{325}}{R_4 + R_{325}} = \frac{51}{35}\,\Omega$$

Und damit ergibt sich für die Ströme

$$I_{11} = \frac{U_1}{R_1 + R_{4325}} = \frac{7}{3}\,\mathrm{A}$$
$$I_{41} = I_{11}\frac{R_{325}}{R_{325} + R_4} = \frac{17}{15}\,\mathrm{A}$$
$$I_{31} = -I_{11} + I_{41} = -\frac{6}{5}\,\mathrm{A}$$
$$I_{21} = I_{31}\frac{R_5}{R_2 + R_5} = -1\,\mathrm{A}$$
$$I_{51} = I_{21} - I_{31} = \frac{1}{5}\,\mathrm{A}$$

Nach dem Überlagerungsverfahren benötigen wir für den Einfluss der zweiten Quelle zunächst die Zusammenschaltungen der Widerstände 1,4,3,5, es ist

$$R_{14} = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} = \frac{4}{3}\,\Omega$$
$$R_{134} = R_{14} + R_3 = \frac{10}{3}\,\Omega$$
$$R_{1345} = \frac{R_{134} R_5}{R_{134} + R_5} = 2\,\Omega$$

Und mit $R_2 = 1\,\Omega$ folgt dann für den Einfluss der zweiten Quelle einfach

$$I_{22} = \frac{U_2}{R_2 + R_{1345}} = 4\,\mathrm{A}$$
$$I_{52} = I_{22}\frac{R_{134}}{R_{134} + R_5} = 1{,}6\,\mathrm{A}$$
$$I_{32} = I_{22} - I_{52} = 2{,}4\,\mathrm{A}$$
$$I_{12} = -I_{32}\frac{R_4}{R_1 + R_4} = -\frac{4}{3}\,\mathrm{A}$$
$$I_{42} = I_{32} + I_{12} = \frac{16}{15}\,\mathrm{A}$$

Und zusammengebaut ergibt sich dann für die Gesamtströme

$$\begin{aligned}
I_1 &= I_{11} + I_{12} = 1\,\mathrm{A}\\
I_2 &= I_{21} + I_{22} = 3\,\mathrm{A}\\
I_3 &= I_{31} + I_{32} = 1{,}2\,\mathrm{A}\\
I_4 &= I_{41} + I_{42} = 2{,}2\,\mathrm{A}\\
I_5 &= I_{51} + I_{52} = 1{,}8\,\mathrm{A}
\end{aligned}$$

Dieser Lösungsweg ist einigermaßen sicher, aber nicht sonderlich effektiv.

Maschenstromverfahren

Als weiterer Lösungsweg würde sich hier das Maschenstromverfahren anbieten. Dazu werden die Maschengleichungen für die Ströme I_1,I_2,I_3 als Maschenströme aufgestellt. Das Gleichungssystem ist dann

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_4 & 0 & R_4 \\ 0 & R_2 + R_5 & -R_5 \\ R_4 & -R_5 & R_3 + R_4 + R_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit Zahlenwerten ist dann

$$\begin{pmatrix} 5{,}4 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & -5 \\ 3 & -5 & 10 \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{V}$$

Erstmal normieren (kann man auch anders machen)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} \\ 1 & -\frac{5}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

Subtrahiere erst von letzter Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{25}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 2 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

und normiere die letzte Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} \\ 0 & -1 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

Addiere zweite und dritte Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

Und kann nun rückwärts die Ströme berechnen, wodurch nun

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{\frac{5}{6}}\,\mathrm{A} = 1{,}2\,\mathrm{A} \\ I_2 &= \frac{5}{6} I_3 + 2\,\mathrm{A} = 3\,\mathrm{A} \\ I_1 &= -\frac{5}{9} I_3 + \frac{5}{3}\,\mathrm{A} = 1\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

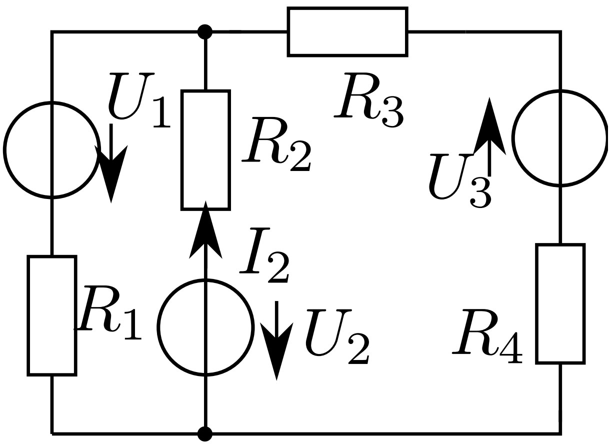
Die fehlenden beiden Ströme ergeben sich leicht durch die Kirchhoff'sche Knotenregel:

$$\begin{aligned} I_4 &= I_1 + I_3 = 2{,}2\,\mathrm{A} \\ I_5 &= I_2 - I_3 = 1{,}8\,\mathrm{A}. \end{aligned}$$

Natürlich erhält man mit beiden Verfahren das gleiche Ergebnis...

6.2 Überlagerungsverfahren

Berechnen Sie mit dem Überlagerungsverfahren den Strom I_2 durch den Widerstand R_2 für die dargestellte Schaltung



...

Lösung: es ergeben sich die einzelnen Anteile

$$\begin{aligned} I_{21} &= U_1 \frac{-1}{R_1 + \frac{R_2(R_3+R_4)}{R_2+R_3+R_4}} \times \frac{R_3 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4} \\ &= \frac{-U_1(R_3 + R_4)}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)} \\ I_{22} &= U_2 \frac{1}{R_2 + \frac{R_1(R_3+R_4)}{R_1+R_3+R_4}} \\ &= \frac{U_2(R_1 + R_3 + R_4)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_1R_4 + R_2R_3 + R_2R_4)} \end{aligned}$$

I_{23} ist wie I_{21}, jedoch sind $(R_3 + R_4) \leftrightarrow R_1$ und $-U_1 \leftrightarrow U_3$ zu tauschen

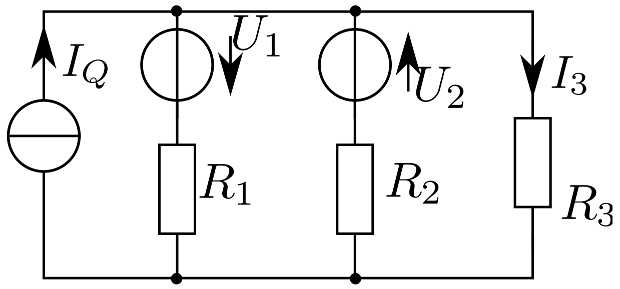
$$I_{23} = \frac{U_3 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_2 R_4}$$

Das Endergebnis ist die Summe aller Anteile, also

$$\begin{aligned} I_2 &= I_{21} + I_{22} + I_{23} \\ &= \frac{-U_1(R_3 + R_4) + U_2(R_1 + R_3 + R_4) + U_3 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_2 R_4}. \end{aligned}$$

6.3 Maschenstromanalyse

Berechnen Sie den Strom I_3 durch den Widerstand R_3 nach der Maschenstromanalyse. Hier sind $R_1 = 1\,\Omega; R_2 = 2\,\Omega; R_3 = 3\,\Omega; U_1 = 1\,\mathrm{V}; U_2 = 2\,\mathrm{V}; I_Q = 3\,\mathrm{A}$



...

Lösung: Die Maschen werden für jedes “Rechteck” einzeln angesetzt, wobei in der linken Masche der schon bekannte Strom I_Q fließt. Hilfreich ist es hierbei, den gesuchten Strom in die letzte Spalte zu schreiben, dann wird dieser als erster berechnet, das spart Arbeit.

$$\begin{pmatrix} R_1 & -R_1 & 0 \\ -R_1 & R_1 + R_2 & -R_2 \\ 0 & -R_2 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_Q \\ I_1 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_1 \\ U_1 + U_2 \\ -U_2 \end{pmatrix}$$

Mit dem bekannten I_Q kann die Zeile weggelassen werden und der entsprechende Eintrag wird auf die rechte Seite gebracht.

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 + U_2 + I_Q R_1 \\ -U_2 \end{pmatrix}$$

Es werden dann die Zeilen auf den ersten Eintrag normiert und die erste von der zweiten Zeile subtrahiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{R_2}{R_1+R_2} \\ 0 & \frac{R_2+R_3}{R_2} - \frac{R_2}{R_1+R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_1+U_2+I_Q R_1}{R_1+R_2} \\ -\frac{U_2}{R_2} + \frac{U_1+U_2+I_Q R_1}{R_1+R_2} \end{pmatrix}$$

Und aus der letzten Zeile folgt dann

$$
\begin{aligned}
\frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_2(R_1 + R_2)} I_3 &= \frac{-U_2(R_1 + R_2) + U_1R_2 + U_2R_2 + I_QR_1R_2}{R_2(R_1 + R_2)} \\
\Leftrightarrow I_3 &= \frac{-U_2R_1 + U_1R_2 + I_QR_1R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}.
\end{aligned}
$$

Mit den Zahlenwerten ergibt sich das Gleichungssystem zu

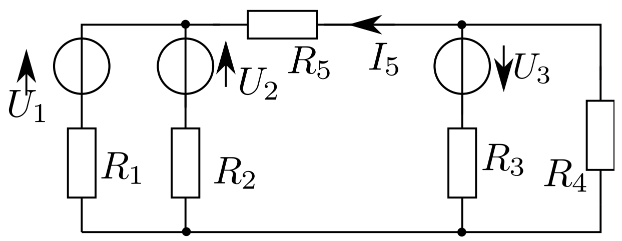
$$
\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \mathrm{A}
$$

und damit $I_1 = 2{,}3636\,\mathrm{A}$ und $I_3 = 545{,}45\,\mathrm{mA}$.

6.4 Maschenstromanalyse

(a) Bestimmen Sie den Strom I_5 durch R_5 mit Hilfe der Maschenstromanalyse. Die Elementwerte sind $R_1 = R_2 = 1\,\Omega$; $R_3 = 2\,\Omega$; $R_4 = 10\,\Omega$; $R_5 = 2\,\Omega$; $U_1 = U_2 = 1{,}5000\,\mathrm{V}$; $U_3 = 2\,\mathrm{V}$.

(b) Wie verändert sich das Gleichungssystem, wenn parallel zu R_4 eine Stromquelle mit dem Quellstrom I_Q wirkt?



...

Lösung: Es werden die offensichtlichen, kleinen Maschen gewählt und I_5 wird als gesuchter Strom wieder in die letzte Zeile geschrieben.

$$
\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & 0 & -R_2 \\ 0 & R_3 + R_4 & R_3 \\ -R_2 & R_3 & R_2 + R_3 + R_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 - U_2 \\ U_3 \\ U_2 + U_3 \end{pmatrix}
$$

Normieren der ersten Spalten und danach eliminieren der Elemente in der ersten Spalte

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{R_2}{R_1+R_2} \\ 0 & 1 & \frac{R_3}{R_3+R_4} \\ 0 & R_3 & R_2 + R_3 + R_5 - \frac{R_2^2}{R_1+R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_1-U_2}{R_1+R_2} \\ \frac{U_3}{R_3+R_4} \\ U_2 + U_3 + \frac{U_1-U_2}{R_1+R_2} R_2 \end{pmatrix}
$$

Aus den letzten Beiden Zeilen folgt dann

$$
\begin{pmatrix} 1 & \frac{R_3}{R_3+R_4} \\ 1 & \frac{R_1R_2+R_1R_3+R_1R_5+R_2R_3+R_2R_5}{R_3(R_1+R_2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_3}{R_3+R_4} \\ \frac{U_2R_1+U_1R_2+U_3(R_1+R_2)}{R_3(R_1+R_2)} \end{pmatrix}
$$

Und dann bleibt nach passender Subtraktion in der letzten Zeile

$$\left(\frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_1R_5 + R_2R_3 + R_2R_5}{R_3(R_1 + R_2)} - \frac{R_3}{R_3 + R_4}\right) I_5 = \frac{U_2R_1 + U_1R_2 + U_3(R_1 + R_2)}{R_3(R_1 + R_2)} - \frac{U_3}{R_3 + R_4}$$

und damit dann

$$I_5 = \frac{(U_2R_1 + U_1R_2)(R_3 + R_4) + U_3(R_1 + R_2)R_4}{(R_1R_2 + R_1R_3 + R_1R_5 + R_2R_3 + R_2R_5)(R_3 + R_4) - R_3^2(R_1 + R_2)}$$

Mit Zahlenwerten folgt dann

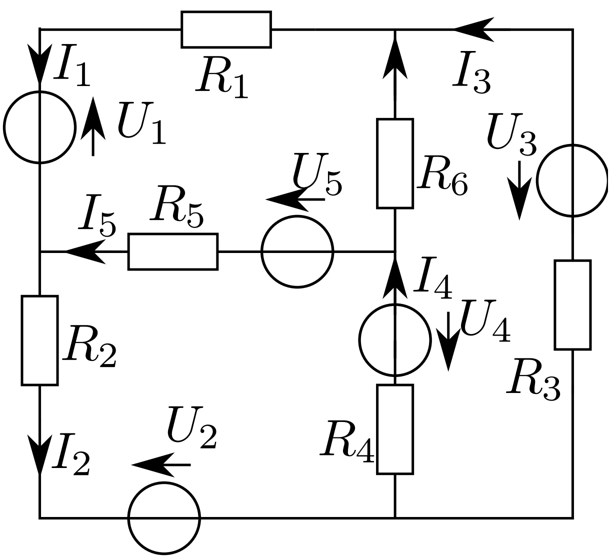
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 12 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_1 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 \\ 40 \\ 760 \end{pmatrix} \mathrm{mA}$$

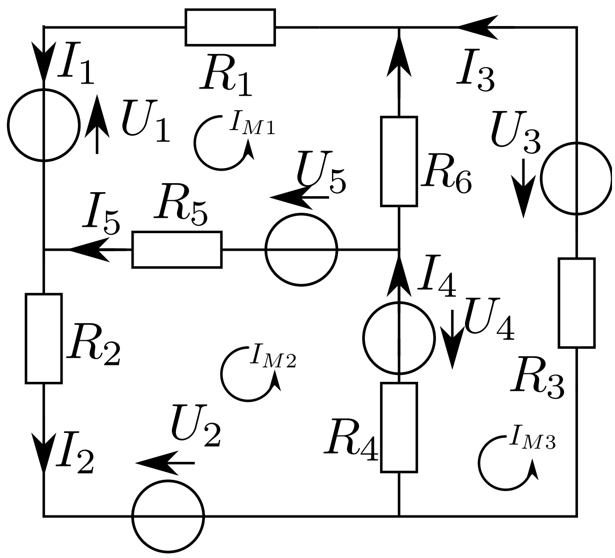
Wenn parallel zu R_4 noch eine Stromquelle mit I_Q liegt, dann wird in der zweiten Zeile die rechte Seite zu $U_3 + I_QR_4$ geändert.
Ggf. würde sich bei dieser Schaltung eine Lösung mit dem Knotenpotenzialverfahren anbieten.

6.5 Maschenstromanalyse

In der u.g. Schaltung betragen $U_1 = 10\,\mathrm{V}$, $U_2 = 50\,\mathrm{V}$ und $U_3 = U_4 = U_5 = 20\,\mathrm{V}$ und alle Widerstände $R = 10\,\Omega$. Bestimmen Sie alle Zweigströme mit Hilfe der Maschenstromanalyse!



...
Lösung:



Die Maschen werden wie gezeigt aufgestellt und es ist $I_1 = I_{M1}$, $I_2 = I_{M2}$, $I_3 = I_{M3}$.

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_5 + R_6 & -R_5 & -R_6 \\ -R_5 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_4 \\ -R_6 & -R_4 & R_3 + R_4 + R_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 + U_5 \\ U_2 + U_4 - U_5 \\ U_3 - U_4 \end{pmatrix}$$

Mit den eingesetzten werte, und passend gekürzt folgt dann

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

Addition der normierten ersten Spalte mit den beiden anderen ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

Und nun nur noch die letzten beiden Spalten bearbeitend folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9}{2} \\ \frac{12}{4} \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

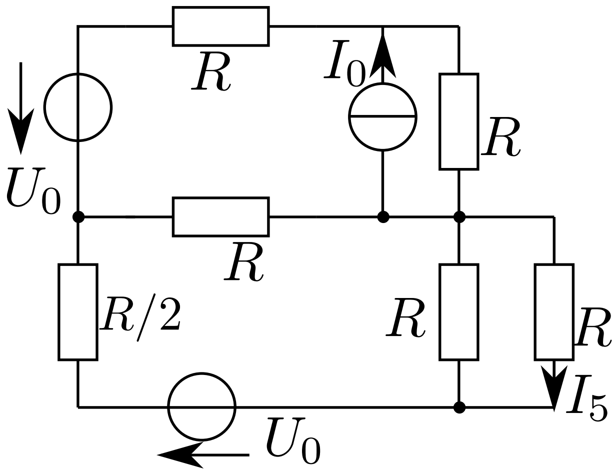
womit dann

$$\begin{aligned} I_3 &= 2\,\mathrm{A} \\ I_2 &= \left(\frac{9}{2} + 2\right)\frac{1}{2}\,\mathrm{A} = 3{,}25\,\mathrm{A} \\ I_1 &= \left(1\,\mathrm{A} + \frac{1}{3}I_2 + \frac{1}{3}I_3\right) = \left(1 + \frac{13}{12} + \frac{2}{3}\right)\,\mathrm{A} = 2{,}75\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

als Endergebnis entsteht. Und weiter ist

$$I_4 = I_2 - I_3 = 1{,}25\,\mathrm{A},$$
$$I_5 = I_2 - I_1 = 0{,}5\,\mathrm{A},$$
$$I_6 = I_1 - I_3 = 0{,}75\,\mathrm{A}.$$

6.6 Kirchhoff'sche Regeln (13 Punkte)



(a) Berechnen Sie den Strom I_5 an eingezeichneter Stelle nach dem Überlagerungsverfahren (Fassen Sie vor Anwendung dessen KEINE Quellen zusammen, geben Sie alle Strombeiträge an!) (4 Punkte)
Lösung:

Bemerkung: In der Originalklausur war der Richtungssinn der unteren Quelle umgedreht, es ergeben sich daher abweichende Ergebnisse

Einfluss von Quelle 1 (oben links):

Hier ist der Gesamtwiderstand

$$R_1 = (R||R + \frac{R}{2})||R + 2R = \frac{5}{2}R$$

Es fließt dann der Strom

$$I_1 = \frac{2}{5} \times \frac{U}{R}$$

und der Strom

$$I_{51} = \frac{I_1}{4} = \frac{1}{10} \times \frac{U}{R}$$

Einfluss der Stromquelle ist fast genau das gleiche, man könnte die ja in eine Spannungsquelle mit $U_{LL} = I_0 R$ umwandeln und dann hat man

$$I_{52} = -\frac{1}{10} \times I_0$$

Bleibt noch die Quelle unten. Aus deren Sicht ist der Gesamtwiderstand der Schaltung

$$R_3 = R + 2R||R = R + \frac{2}{3}R = \frac{5}{3}R$$

Es fließt also der Strom

$$I_3 = \frac{3}{5} \times \frac{U}{R}$$

und damit der Strom

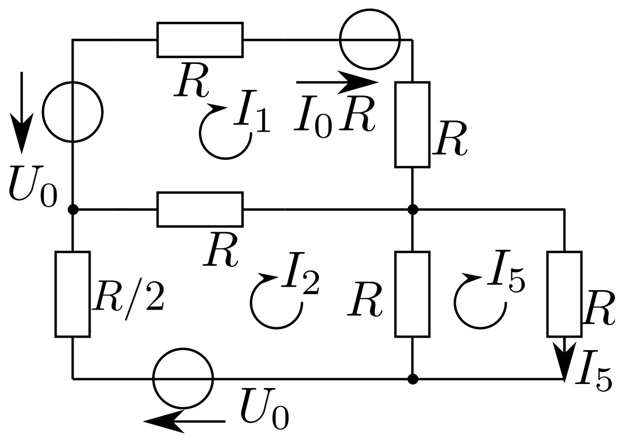
$$I_{53} = -\frac{3}{10} \times \frac{U}{R}$$

Am Ende hat man dann

$$I_5 = I_{51} + I_{52} + I_{53} = -\frac{2}{10} \times \frac{U}{R} - \frac{1}{10} \times I_0$$

(Für jeden Teilstrom und das Endergebnis je 1 Punkt)

(b) Stellen Sie die Matrix für die Maschenstromanalyse auf, wandeln Sie dazu ggf. Quellen in die besser geeignete Form vorher um. Achten Sie darauf, dass I_5 nach Lösung des Gleichungssystems direkt zur Verfügung steht! (4 Punkte)
Lösung: Zuerst wird die Stromquelle in eine äquivalente Spannungsquelle umgewandelt und es bleiben dann drei Maschen



und es ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3R & -R & 0 \\ -R & 2{,}5R & -R \\ 0 & -R & 2R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 - I_0R \\ -U_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4 Punkte für Matrix etc.)

(c) Wenn Sie ihrem obigen Ergebnis nicht vertrauen, dann lösen Sie hier das GLS, ansonsten fahren Sie mit der nächsten Teilaufgabe fort. Es gibt hier keine Punkte, aber falsche Ergebnisse weiter unten werden auch nicht als Folgefehler gewertet!
Lösung: Das Gleichungssystem kann gelöst

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 2{,}5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} R \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_0 - I_0 R}{3} \\ -U_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{13}{6} & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} R \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_0 - I_0 R}{3} \\ -\frac{2}{3}U_0 - \frac{I_0 R}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{13} \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} R \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_0 - I_0 R}{3} \\ -\frac{4}{13}U_0 - \frac{2 I_0 R}{13} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{13} \\ 0 & 0 & \frac{20}{13} \end{pmatrix} R \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_0 - I_0 R}{3} \\ -\frac{4}{13}U_0 - \frac{2 I_0 R}{13} \\ -\frac{4}{13}U_0 - \frac{2 I_0 R}{13} \end{pmatrix}$$

Und damit ist das Endergebnis

$$I_5 = -\frac{2}{10} \times \frac{U_0}{R} - \frac{I_0}{10}$$

(d) Wie muss I_0 eingestellt werden, wenn die obere Masche keinen Einfluss auf den Strom I_5 haben soll (d.h. im oberen Widerstand kein Strom fließt)? Begründen Sie Ihre Wahl mit Rechnung oder einem vollständigen Satz! (1 Punkt)
Lösung:

Dazu muss die obere Masche, bspw. im oberen Widerstand R stromlos sein, dann ist die Masche komplett abgekoppelt, aber es fließt natürlich immer noch ein Strom durch den gemeinsamen Widerstand beider Maschen. Insgesamt fließt oben (durch die beiden Quellen in der betrachteten Masche)

$$I_{11} = \frac{2(U_0 - I_0 R)}{5R}$$

Die untere Quelle lässt zunächst aus der unteren Quelle heraus einen Strom von

$$I_u = \frac{U_0}{\frac{5}{3}R} = \frac{3}{5} \times \frac{U_0}{R}$$

fließen, der sich dann oben in den Strom

$$I_{12} = -\frac{3}{5} \times \frac{U_0}{R} \times \frac{R}{3R} = -\frac{U_0}{5R}$$

aufteilt.

I_0 ist nun mittels obigen Zusammenhängen so einzustellen, dass $I_{12} + I_{11} = 0$ wird:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2(U_0 - I_0 R)}{5R} - \frac{U_0}{5R} \\ \Leftrightarrow U_0 - 2I_0 R &= 0 \\ \Leftrightarrow I_0 &= \frac{U_0}{2R} \end{aligned}$$

(1 Punkt)

(e) Wie groß ist dann der Spannungsabfall über dem Widerstand, durch den I_5 fließt? (1 Punkt)
Lösung: Es spielt ja nur noch die untere Spannungsquelle eine Rolle, daher sorgt die alleine für einen Spannungsabfall von

$$U_5 = U_0 \frac{R/2}{2R} = \frac{U_0}{4}$$

(1 Punkt)

Bzw., wer mit der ungenauen Argumentation oben gearbeitet hat und dann in die Formel für I_5 einsetzte erhielt:

$$I_5 = -\frac{3}{10} \times \frac{U_0}{R}.$$

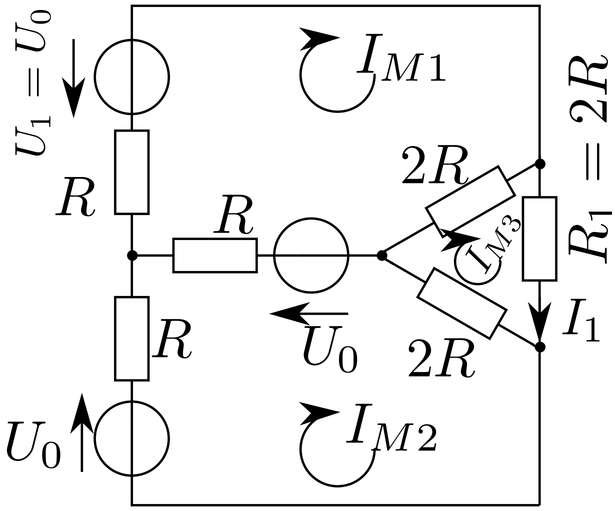
(f) Stellen Sie nun I_0 so ein, dass $I_5 = 0$ wird, geben Sie dann die Leistungsumsätze in den einzelnen Widerständen an! (3 Punkte)
Lösung: Nach obigen Rechnungen folgt

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{2}{10} \times \frac{U_0}{R} - \frac{I_0}{10} \\ \Leftrightarrow I_0 &= -2\frac{U_0}{R} \end{aligned}$$

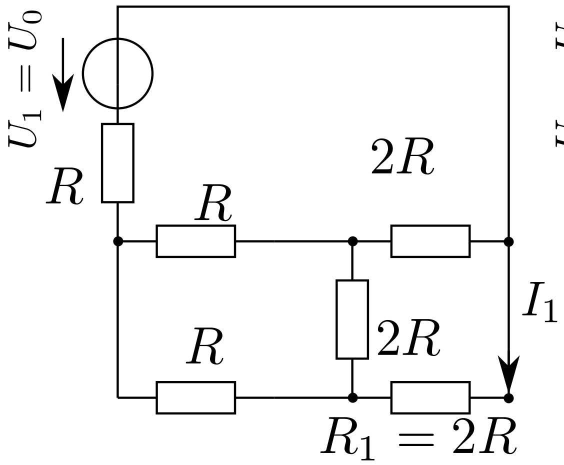
(1 Punkt) Die Leistungsumsätze sind dann:

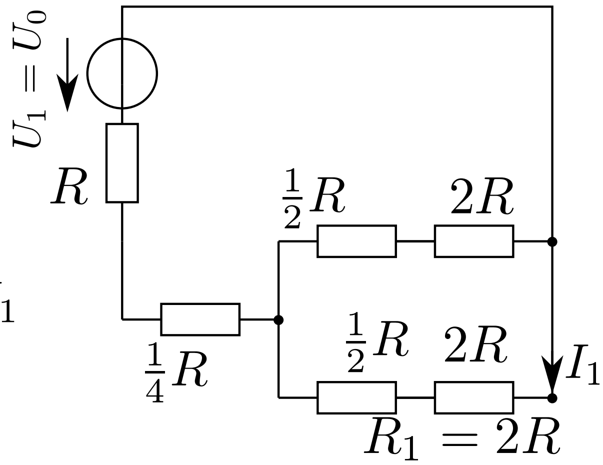
In den Widerständen des unteren Teiles (ohne den mittleren) liegt kein Leistungsumsatz vor, weil stromlos, in jedem der oberen Widerstände ist dann der gleiche Leistungsumsatz vorhanden, und der ist jeweils $P = U_0^2/R$. **(2 Punkte)**

6.7 Maschen, Überlagerung oder Dreieck und Stern? (16 Punkte)



(a) Berechnen Sie den Strom I_1 durch den Widerstand R_1 (wie eingezeichnet), wenn nur die Spannungsquelle U_1 aktiv ist und die beiden anderen ausgeschaltet sind! (4 Punkte)
Lösung: Wenn zwei Quellen abgeschaltet werden, dann ergibt sich das folgende Schaltbild:





Variante 1 (Erkennen!)

Der $2R$-Widerstand im Dreieck unten links liegt auf beiden Sieten auf gleichem Potenzial und ist damit strom und spannungslos. Somit kann er weggelassen werden. Damit ist der Gesamtwiderstand der Konfiguration aus Sicht der Quelle U_1

$$R_{ges} = R + (2R + R)||(2R + R) = \frac{5}{2}R$$

Der Gesamtstrom ist also

$$I_{ges} = \frac{2}{5} \times \frac{U_0}{R}$$

und die symmetrische Anordnung teilt den Strom gleichmäßig in beide Arme auf, womit

$$I_1 = \frac{1}{5} \times \frac{U_0}{R}$$

folgt.

Variante 2 (Stern-Dreieck)

Bei diesem wurde schon die Dreiecks-Sternumwandung des Dreiecks aus R,R,$2R$ mit

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{31}+R_{32}} = \frac{1}{2}R$$
$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{31}+R_{32}} = \frac{1}{2}R$$
$$R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{31}+R_{32}} = \frac{1}{4}R$$

vorgenommen.

Damit ist der Strom I_1 leicht zu berechnen. Der gesamte Widerstand, den die Quelle sieht ist

$$R_{ges} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2}R + \frac{1}{4}R + R = \frac{5}{2}R$$

und es fließt demnach der gesamte Strom

$$I_{ges} = \frac{U_{ges}}{R_{ges}} = \frac{2}{5}\frac{U_0}{R},$$

der sich auf beide parallelen Zweige mit

$$I_1 = \frac{1}{5}\frac{U_0}{R}$$

gleichmäßig aufteilt.

Variante 3 (Standardverfahren)

Wie weiter unten noch gezeigt, kann die Aufgabe auch bspw. mittels Maschenstromverfahren gelöst werden.

(b) Bestimmen Sie den Strom I_1 wenn nun alle Spannungsquellen aktiv sind. Verwenden Sie den Überlagerungssatz (ggf. Stern-Dreicksumformung) und oder präzise erläuterte Symmetrieargumente! (2 Punkte)

Lösung: Die untere Quelle (Überlagerungssatz) erzeugt betragsmäßig den gleichen Strom, allerdings entgegengesetzt, so dass sich der Einfluss der oberen und der unteren Quelle gegenseitig aufheben.

Die rechte Quelle wird nach oben und unten vollkommen symmetrisch belastet. Der Strom teilt sich im Dreieck also nach oben und unten gleich auf. Damit sieht R_1 am unteren und oberen Anschluss das gleiche Potenzial, es fließt hierdurch kein Strom.

In der Summe fließt also kein Strom durch R_1.

Bewertung. 2 Punkte für Ergebnis und saubere Argumentation.

(c) Stellen Sie die Matrix für die Maschenstromanalyse auf, wandeln Sie dazu ggf. Quellen in die besser geeignete Form vorher um. Achten Sie darauf, dass I_{M3} nach Lösung des Gleichungssystems direkt zur Verfügung steht! (4 Punkte)
Lösung:

Es ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4R & -R & -2R \\ -R & 4R & -2R \\ -2R & -2R & 6R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4 Punkte für Matrix etc.)

(d) Berechnen Sie die Maschenströme, wenn wiederum nur U_1 aktiv ist und die beiden anderen Quellen ausgeschaltet sind! (3 Punkte)
Lösung: Das Gleichungssystem kann gelöst werden in folgenden Schritten:

$$\begin{pmatrix} 4R & -R & -2R \\ -R & 4R & -2R \\ -2R & -2R & 6R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4R & -R & -2R \\ 0 & \frac{15}{4}R & -\frac{5}{2}R \\ 0 & -\frac{5}{2}R & 5R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ \frac{1}{4}U_0 \\ \frac{1}{2}U_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4R & -R & -2R \\ 0 & 3R & -2R \\ 0 & -5R & 10R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ \frac{1}{5}U_0 \\ U_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4R & -R & -2R \\ 0 & 3R & -2R \\ 0 & 0 & \frac{20}{3}R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ \frac{1}{5}U_0 \\ \frac{4}{3}U_0 \end{pmatrix}$$

Damit ist dann sofort und mit Rückwärts einsetzen:

$$I_{M1} = \frac{2}{5} \times \frac{U_0}{R}$$
$$I_{M2} = \frac{1}{5} \times \frac{U_0}{R}$$
$$I_{M3} = \frac{1}{5} \times \frac{U_0}{R}$$

Bewertung: für jeden Maschenstrom 1 Punkt, also 3 Punkte

(e) Bestimmen Sie die Ströme durch alle Widerstände unter vorgenannter Bedingung! (3 Punkte)

Lösung: Erstmal die $2R$-Widerstände, da sind das

$$
\begin{aligned}
I_1 &= I_{M3} = \frac{1}{5} \times \frac{U_0}{R} \\
I_2 &= I_{M1} - I_{M3} = \frac{1}{5} \times \frac{U_0}{R} \\
I_3 &= I_{M2} - I_{M3} = 0
\end{aligned}
$$

Und dann noch die Sternwiderstände (oben, rechts, unten)

$$
\begin{aligned}
I_o &= I_{M1} = \frac{2}{5} \times \frac{U_0}{R} \\
I_r &= I_{M1} - I_{M2} = \frac{1}{5} \times \frac{U_0}{R} \\
I_u &= I_{M2} = \frac{1}{5} \times \frac{U_0}{R}
\end{aligned}
$$

.

Bewertung. Für jeden richtigen Wert 0,5 Punkte, also zusammen 3 Punkte