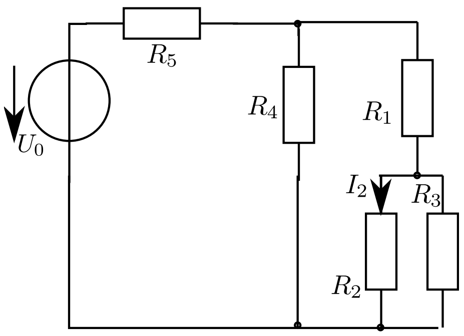
Grundlagen der Elektrotechnik I
Duale Hochschule Karlsruhe
Dozent: Prof. Dr.-Ing. Gerald Oberschmidt

5 Berechnung von Gleichstromkreisen 1

5.1 Spannungs- und Stromteiler

Berechnen Sie den Strom I_2 durch R_2 mit Hilfe der



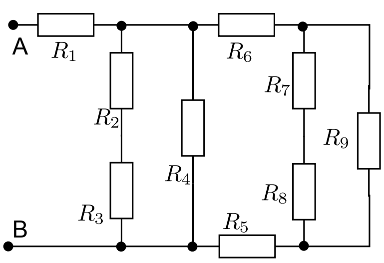
(a) Stromteilerregel

(b) Spannungsteilerregel
Lösung: In beiden Fällen ist die Lösung

$$I_2 = \frac{R_3 R_4 U_0}{R_5\left[(R_4+R_1)(R_2+R_3)+R_2R_3\right]+R_4\left[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3\right]}$$

5.2 Schrittweise Vereinfachung

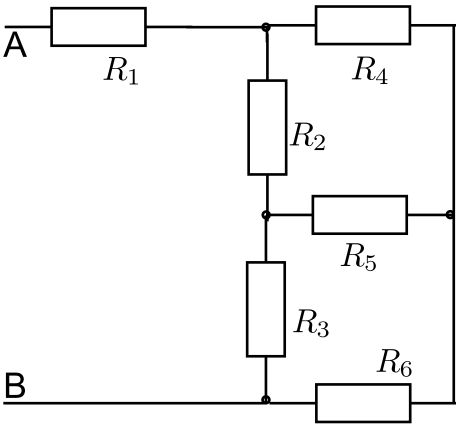
Berechnen Sie den Gesamtwiderstand der Schaltung bezüglich der Klemmen A-B durch schrittweise Vereinfachung. Alle Widerstände haben 1Ω. Wer Spaß daran hat, möge es symbolisch berechnen!



...
Lösung: ...das sollte nun selber gehen.... Das Endergebnis ist $R_{AB} = \frac{23}{15},\Omega = 1{,}5\overline{3}\,\Omega$.

5.3 Berechnung mit Stern-Dreiecksumwandlung

Für die skizzierte Schaltung ist der Widerstand zwischen den Punkten A und B zu berechnen. ($R_1 = 50\,\Omega$, $R_2 = R_4 = 20\,\Omega$, $R_5 = 30\,\Omega$, $R_3 = R_6 = 10\,\Omega$).



Lösung:
Die Brücke ist abgeglichen und zudem sind $R_2 + R_3 = R_4 + R_6 = 30\,\Omega$, daher kann man R_5 vernachlässigen und so ist der Gesamtwiderstand

$$\begin{aligned} R_{ges} &= R_1 + (R_2 + R_3)||(R_4 + R_6) \\ &= R_1 + \frac{R_2 + R_3}{2} = 65\,\Omega \end{aligned}$$

Wer's nicht gesehen hat, der kann aber auch mittels Dreiecks-Stern-Umformung zum Ziel kommen:
Zuerst wandeln wir einen der Sterne (4,5,6) oder (2,5,3) in eine Dreiecksschaltung um. Wir wählen letztere und erhalten dann

$$\begin{aligned} R_2' &= \frac{R_2R_5 + R_2R_3 + R_3R_5}{R_5} = \frac{1100\,\Omega^2}{30\,\Omega} = 36\frac{2}{3}\,\Omega \\ R_3' &= \frac{R_2R_5 + R_2R_3 + R_3R_5}{R_2} = 55\,\Omega \\ R_5' &= \frac{R_2R_5 + R_2R_3 + R_3R_5}{R_3} = 110\,\Omega \end{aligned}$$

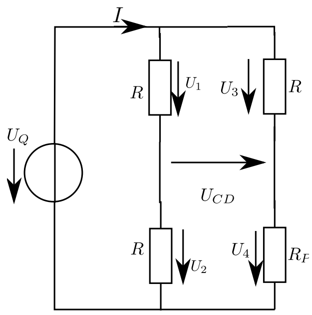
Die Parallelschaltungen ergeben nun

$$\begin{aligned} R_5'||R_4 &= \frac{R_5'R_4}{R_5' + R_4} = 2200/130\,\Omega = 16{,}923\,\Omega \\ R_3'||R_6 &= \frac{R_3'R_6}{R_3' + R_6} = 550/65\,\Omega = 8{,}462\,\Omega \\ R_2'||(R_3'||R_6 + R_5'||R_4) &= \frac{(16{,}923 + 8{,}462)36{,}667}{16{,}923 + 8{,}462 + 36{,}667}\,\Omega = \frac{930{,}78}{62{,}052}\,\Omega = 15\,\Omega \end{aligned}$$

Nun noch die Reihenschaltung mit R_1 und wir erhalten $R_{ges} = 65\,\Omega$ als Endergebnis für den Widerstand zwischen den Punkten A und B.

5.4 Brücke

Die skizzierte Wheatstonebrücke mit drei gleichen Nickelinwiderständen R und einem Platinwiderstand R_P eignet sich für Temperaturmessungen. Bei 20°C sind alle vier Widerstände gleich, so dass die Spannung U_{CD} Null ist. Bei höheren Temperaturen sind aufgrund der verschiedenen Temperaturkoeffizienten die Widerstände R und R_P unterschiedlich, so dass sich die Spannung U_{CD} mit der Temperatur ändert.



(a) Wie lautet die Formel für die Spannung U_{CD} in Abhängigkeit von α_{20}, α_{P20}, R_P, R, U, ΔT?
Lösung: Bei 20°C ist die Brücke abgeglichen, also gilt $U_1 = U_2 = U_3 = U_4$ und natürlich auch $R = R_P$. Ändert sich die Spannung so bleiben $U_1 = U_2$ gleich wie vorher, für die Differenzspannung gilt $U_{CD} = U_2 - U_4$. Der Spannungsteiler aus R und R_P ändert sich und zwar nach

$$\begin{aligned} U_4 &= U_Q \frac{R_P(T)}{R(T) + R_P(T)} = \frac{R(1+\alpha_{P20}\Delta T)}{R(1+\alpha_{20}\Delta T) + R_P(1+\alpha_{P20}\Delta T)} \\ &= U_Q \frac{(1+\alpha_{P20}\Delta T)}{2 + (\alpha_{20}+\alpha_{P20})\Delta T} \end{aligned}$$

.

und damit erfolgt als Endergebnis

$$U_{CD} = U_Q \left(\frac{1}{2} - \frac{(1+\alpha_{P20}\Delta T)}{2 + (\alpha_{20}+\alpha_{P20})\Delta T} \right).$$

(b) Berechnen Sie für $\Delta T = 50°\text{C}$ die Spannung U_{CD}, wenn $\alpha_{20} = 0{,}23 \times 10^{-3}°\text{C}^{-1}$ und $\alpha_{P20} = 0{,}002°\text{C}^{-1}$ und $U = 10\,\text{V}$ betragen.
Lösung: Einsetzen bringt uns dann $U_{CD} = -209{,}57\,\text{mV}$.

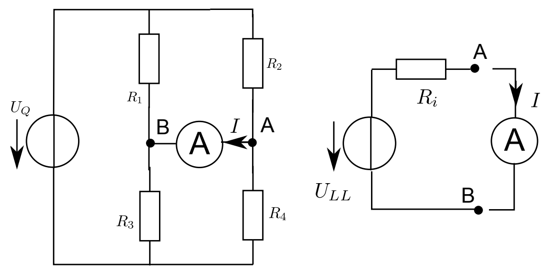
(c) Berechnen Sie ΔT als Funktion von U_{CD} nach der in a) berechneten Formel.
Lösung: Wir lösen auf:

$$\begin{aligned} \frac{U_{CD}}{U_Q} - \frac{1}{2} &= -\frac{(1+\alpha_{P20}\Delta T)}{2 + (\alpha_{20}+\alpha_{P20})\Delta T} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{U_{CD}}{U_Q} - \frac{1}{2}\right)(2 + (\alpha_{20}+\alpha_{P20})\Delta T) &= -1 - \alpha_{P20}\Delta T \\ \Leftrightarrow \left(2\frac{U_{CD}}{U_Q} - 1\right) + 1 &= -\alpha_{P20}\Delta T - \left(\frac{U_{CD}}{U_Q} - \frac{1}{2}\right)(\alpha_{20}+\alpha_{P20})\Delta T \\ \Leftrightarrow \Delta T &= -2\frac{U_{CD}}{U_Q} \frac{1}{\alpha_{P20} + \left(\frac{U_{CD}}{U_Q} - \frac{1}{2}\right)(\alpha_{P20}+\alpha_{20})} \end{aligned}$$

Wenn man nun von dem abgeglichenen Fall ausgeht, in dem $U_{CD} \approx 0\,\mathrm{V}$ ist, dann kann man weiter vereinfachen und bekommt

$$\Delta T \approx -4\frac{U_{CD}}{U_Q} \cdot \frac{1}{\alpha_{P20} - \alpha_{20}}.$$

5.5 Strom in der Brücke



Die oben gezeichnete Brückenschaltung ist weiter zu analysieren. Als Ziel soll die Empfindlichkeit der Brückenschaltung berechnet werden.

(a) Bestimmen Sie die Parameter der äquivalenten Spannungsquelle der Brücke bezüglich der Klemmen A und B!
Lösung: Der Innenwiderstand kann einfach bestimmt werden, indem die Spannungsquelle durch einen Kurzschluss ersetzt wird. Es ergibt sich also

$$\begin{aligned} R_i &= \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} \\ &= \frac{R_1 R_3 (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_1 + R_3)}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)} \end{aligned}$$

Und die Leerlaufspannung wird durch die Spannungsteiler R_2, R_4 und R_1,R_3 bestimmt. und es ist

$$\begin{aligned} U_{LLAB} &= U_4 - U_3 = U_Q \frac{R_4}{R_2 + R_4} - U_Q \frac{R_3}{R_1 + R_3} \\ &= U_Q \frac{R_4 (R_1 + R_3) - R_3 (R_2 + R_4)}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)} \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie den Strom, der durch einen idealen Strommesser fließt!
Lösung: Das wäre ja der Kurzschlussstrom der äquivalenten Quelle, also

$$I = \frac{U_{LLAB}}{R_i} = U_Q \frac{R_4 (R_1 + R_3) - R_3 (R_2 + R_4)}{R_1 R_3 (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_1 + R_3)}$$

(c) (*) Dieses ist zum Knobeln! Bestimmen Sie die Empfindlichkeit der Schaltung bei kleinen Abweichungen des zu messenden Widerstandes R_3! Folgende Tipps zum Vorgehen:

- Setzen Sie $R_3 \to R_3(1 + \Delta)$, wobei Δ eben die Abweichung ist.
- Verwenden Sie die Abgleichbedingung als $a = \frac{R_3}{R_1} = \frac{R_4}{R_2}$

- Klammern Sie in dem Ausdruck für I in Zähler und Nenner jeweils R_1R_2 aus und drücken Sie soviel wie möglich in a aus.
- Nähern sie für kleine Abweichungen Δ

...

Lösung: Erstmal Klammern wir aus und vereinfachen wir und es ergibt sich:

$$I = U_Q \frac{R_1R_2}{R_1R_2} \cdot \frac{(1+\frac{R_3}{R_1}) - (1+\frac{R_4}{R_2})}{R_3(1+\frac{R_4}{R_2}) + R_4(1+\frac{R_3}{R_1})}$$

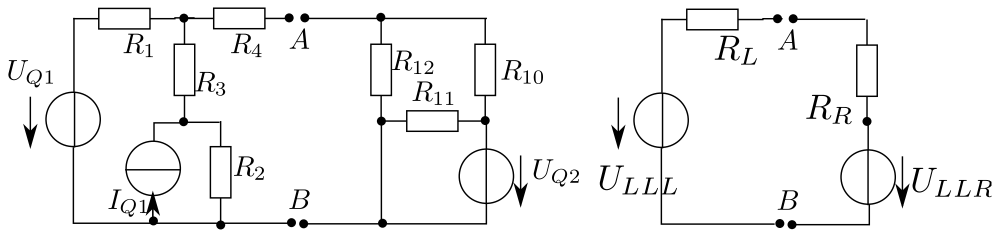
unter Verwendung der o.g. Abkürzungen erhält man nun:

$$I = U\frac{a\Delta}{(1+a)\left[R_4 + R_3(1+\Delta)\right] + R_4 a\Delta}$$

Und mit der Näherung $\Delta \ll 1$ folgt (Δ wird im Nenner vernachlässigt)

$$I = U\frac{a\Delta}{(1+a)(R_4+R_3)}.$$

5.6 Ersatzspannungsquelle

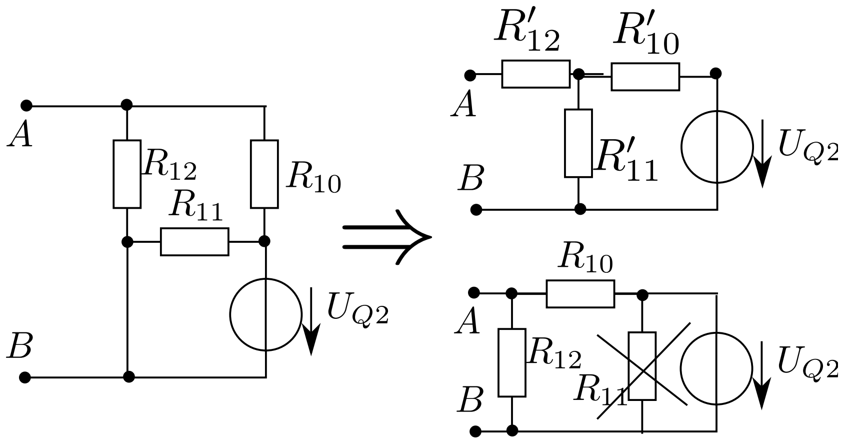


Berechnen Sie die Spannung U_{AB}. Teilen Sie dazu das Netzwerk an diesen Punkten in einen linken und einen rechten Teil auf und berechnen Sie jeweils die linksseitige und rechtseitige äquivalente Spannungsquelle. Danach können Sie alles zu einer einfachen Masche wieder zusammenführen und die gesuchte Spannung berechnen. Das Ergebnis darf als Abkürzungen die Parameter der Ersatzquellen enthalten.

Lösung: Links ist die Stromquelle in eine Spannungsquelle umzuwandeln und dann erhält man leicht

$$\begin{aligned} U_{LLL} &= \frac{U_{Q1}(R_2+R_3) + I_{Q1}R_1R_2}{R_1+R_2+R_3} \\ R_L &= R_4 + \frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3} \end{aligned}$$

Rechts ist es etwas schwieriger. Zuerst muss das Dreieck gebildet aus den Widerständen in einen Stern umgewandelt werden mit:



$$
\begin{aligned}
R'_{10} &= \frac{R_{10}R_{11}}{R_{10}+R_{11}+R_{12}}\\
R'_{11} &= \frac{R_{11}R_{12}}{R_{10}+R_{11}+R_{12}}\\
R'_{12} &= \frac{R_{10}R_{12}}{R_{10}+R_{11}+R_{12}}
\end{aligned}
$$

Und dann sind der Innenwiderstand und die Leerlaufspannung

$$
\begin{aligned}
R_R &= \frac{R_{10}R_{12}}{R_{10}+R_{12}}\\
U_{LLR} &= U_{Q2}\frac{R'_{11}}{R'_{10}+R'_{11}}\\
&= U_{Q2}\frac{R_{11}R_{12}}{R_{10}R_{11}+R_{11}R_{12}}\\
&= U_{Q2}\frac{R_{12}}{R_{10}+R_{12}}.
\end{aligned}
$$

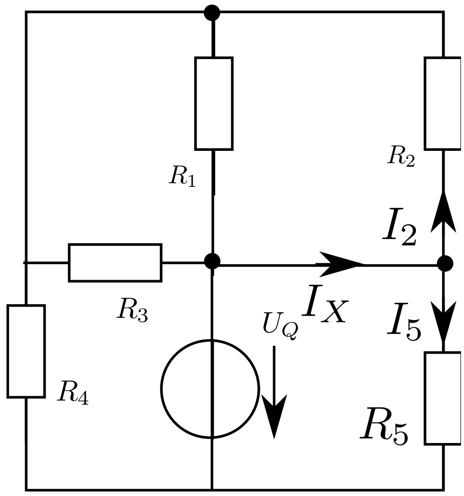
Alternativ kann man auch die Schaltung umzeichnen und sieht, dass R_{11} dann parallel zu der (idealen) Spannungsquelle U_{Q2} zu liegen kommt. Dieser Widerstand hat also nichts mit dem Endergebnis zu tun und kann einfach weggelassen werden. Durch Übung sieht man das schneller! Und am Ende erfolgt der Maschenumlauf mit

$$
\begin{aligned}
IR_R + IR_L + U_{LLR} - U_{LLL} &= 0\\
\Leftrightarrow I &= \frac{U_{LLL}+U_{LLR}}{R_R+R_L}
\end{aligned}
$$

Und weiter folgt dann für die gesuchte Spannung zwischen den Klemmen A, B:

$$
\begin{aligned}
U_{AB} &= IR_R + U_{LLR} = \frac{U_{LLL}-U_{LLR}}{R_R+R_L}R_R + U_{LLR}\\
&= \frac{U_{LLL}R_R + U_{LLR}R_L}{R_R+R_L}.
\end{aligned}
$$

5.7 Aufteilung

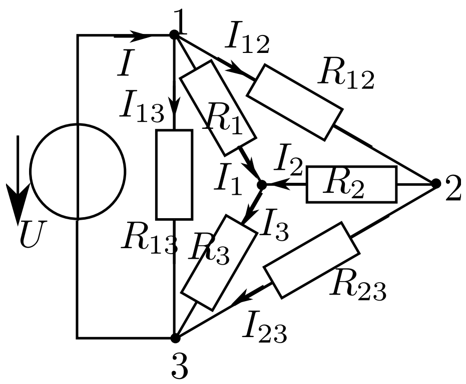


Die dargestellte Schaltung enthält die Widerstände $R_1 = 50\,\Omega, R_2 = 45\,\Omega, R_3 = 40\,\Omega, R_4 = 55\,\Omega, R_5 = 60\,\Omega$. Die vorhandenen Spannungsquelle liefert die Spannung $U_Q = 48\,\text{V}$. Wie groß ist der Strom I_X?
Lösung: Strom durch R_5 ist $I_5 = U_Q/R_5 = 0{,}8\,\text{A}$.
Strom durch R_2 wird bestimmt durch den Gesamtstrom durch R_4 und das vorgeschaltete Konstrukt aus der Parallelschaltung von R_1,R_2,R_3 und dann dem Stromteiler auf R_2, also

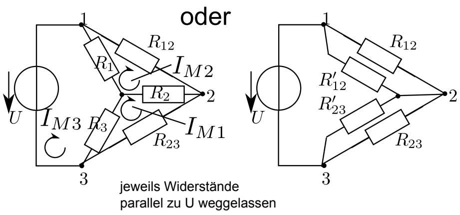
$$\begin{aligned} I_4 &= U_Q \frac{1}{R_4 + \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}} \\ &= 0{,}6869\,\text{A} \\ I_2 &= I_4 \frac{R_1 R_3}{R_2(R_1 + R_3) + R_1 R_3} = 0{,}227\,\text{A} \end{aligned}$$

Das Endergebnis ist dann wohl $I_X = 1{,}027\,\text{A}$.

5.8 Stern und Dreieck



Die skizzierte Schaltung mit den Widerständen $R_1 = R_2 = R_{23} = 3\,\Omega$ und $R_3 = R_{12} = R_{13} = 1\,\Omega$ liegt an der Spannung $U = 4{,}5\,\text{V}$. Bestimmen Sie alle Teilströme!
Lösung:



R_{13} liegt parallel zur idealen Spannungsquelle, damit fließen dort $I_{13} = U/R_{13} = 4{,}5\,\mathrm{A}$
Und nun gibt es mindestens vier Wege zum Ziel, ich führe nur zwei auf:

(a) Maschenstomverfahren:

Wir führen die Ströme in den Maschen wie bezeichnet ein und erhalten die Matrix

$$\begin{pmatrix} R_1+R_3 & -R_1 & -R_3 \\ -R_1 & R_{12}+R_1+R_2 & -R_2 \\ -R_3 & -R_2 & R_3+R_2+R_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -3 & 7 & -3 \\ -1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5\mathrm{V} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

Aus diesen Maschenströmen ergeben sich dann alle anderen zu

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{M1} - I_{M2} = 1\,\mathrm{A}, & I_2 &= I_{M2} - I_{M3} = 0{,}5\,\mathrm{A} \\ I_3 &= I_{M1} - I_{M3} = 1{,}5\,\mathrm{A}, & I_{12} &= I_{M2} = 1{,}5\,\mathrm{A} \\ I_{23} &= I_{M3} = 1\,\mathrm{A}, & I_{13} &= 4{,}5\,\mathrm{A} \\ I &= I_{13} + I_{M1} = 7\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

(b) Oder man nimmt eine Stern-Dreiecks-Umformung (z.B. des inneren Sterns) vor und bestimmt erstmal das Potenzial des Punktes (2). Man erhält die notwendigen Dreieckswiderstände

$$R'_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} = 15\Omega,\ R'_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} = 5\Omega$$

Und bestimmt mit dem Spannungsteiler ($R_{12}||R'_{12} = \frac{15}{16}\Omega$ und $R_{23}||R'_{23} = \frac{15}{8}\Omega$) das Teilungsverhältnis zu 2:1 und damit die Spannung an Punkt 2 zu $U_2 = 3\,\mathrm{V}$. Es fehlt das Potential des Sternpunktes, das wir aber auch nicht brauchen, denn es gilt

$$\begin{aligned} I_1 R_1 + I_3 R_3 &= U \\ I_3 R_3 + I_2 R_2 &= U_2 \\ I_1 + I_2 &= I_3 \end{aligned}$$

Und durch einsetzen in das Gleichungssystem und rechnen erhält man dann $I_2 = 0{,}5\,\mathrm{A}$ und $I_1 = 1\,\mathrm{A}$. Weitere Dinge folgen dann durch die Ströme durch die Dreieckswiderstände und die erste Kirchhoffsche Regel an den jeweiligen Punkten.