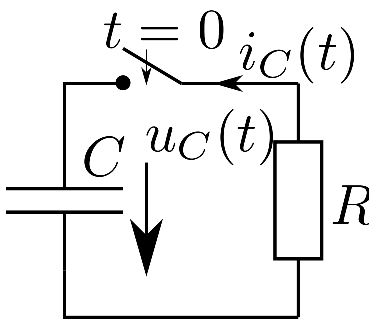
Grundlagen der Elektrotechnik I
Duale Hochschule Karlsruhe
Dozent: Prof. Dr.-Ing. Gerald Oberschmidt

12 Schaltvorgänge

12.1 Entladung einer Kapazität



Eine Kapazität mit $C = 1\,\mu\mathrm{F}$ ist auf die Spannung $U_C = 100\,\mathrm{V}$ aufgeladen. Die Kapazität wird über einen Widerstand $R = 1\,\mathrm{k}\Omega$ entladen, indem zum Zeitpunkt $t = 0$ der Schalter geschlossen wird.

(a) Geben Sie die Spannung $u_C(t)$ für $t \geq 0$ an!

(b) Berechnen Sie den im Kreis fließenden Strom $i_C(t)$ für $t \geq 0$!
Lösung: Der Maschenumlauf ergibt die Differentialgleichung

$$u_C(t) + u_R(t) = 0$$
$$\frac{1}{C} \times \int_0^t i(t')\,dt' + Ri = 0$$
$$\Rightarrow i + RC\frac{di}{dt} = 0$$

wir gelöst von

$$i(t) = I_0 \times e^{at}$$

und damit wird aus der DLG eine algebraische Gleichung mit

$$1 + RCa = 0, \qquad \Leftrightarrow a = -\frac{1}{RC} = -1\,\frac{1}{\mathrm{ms}}$$

Und für die Spannung folgt (man braucht das für die Anfangsbedingung)

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \times \int_0^t i(t')\,dt' = -RI_0 e^{-t/(RC)}$$

und als Anfangsbedingung natürlich $u_C(t = 0) = U_0$. Damit ist $I_0 = 100\,\mathrm{mA}$ und insgesamt

$$u_C(t) = 100\,\mathrm{V} \times e^{-t/1\,\mathrm{ms}}$$
$$i_C(t) = -100\,\mathrm{mA} \times e^{-t/1\,\mathrm{ms}}$$

12.2 Isolierter Kondensator

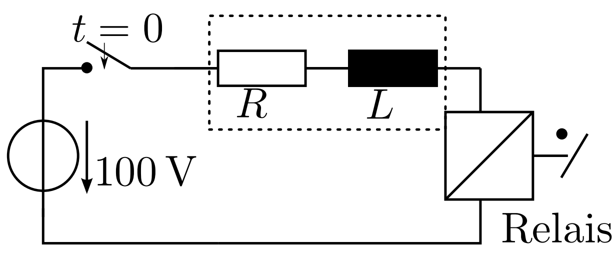
Ein geladener Elektrolytkondensator mit der Kapazität $C = 25\,\mu\mathrm{F}$ wird isoliert aufgestellt. Nach 10 Minuten ist die Spannung um 10 % vom Anfangswert abgesunken. Wie groß ist der Leckwiderstand des Kondensators?
(Anmerkung: Da jedes Dielektrikum auch eine sehr kleine Leitfähigkeit besitzt, tritt bei geladenen Kondensatoren durch das Dielektrikum hindurch ein Leitungsstrom auf, den man als Leckstrom bezeichnet. Im Ersatzschaltbild kennzeichnet man diese Erscheinung durch die Parallelschaltung einer idealen Kapazität mit einem ohmschen Widerstand, dem sogenannten Leck- oder Verlustwiderstand. Er bedingt die Entladung eines aufgeladenen, isolierten Kondensators.)
Lösung: Das Ersatzschaltbild ist hier die Parallelschaltung der bekannten Kapazität mit dem unbekannten Widerstand R. Die Entladefunktion ist damit

$$u_C(t) = U_0 \times e^{-t/(RC)}$$

und das zu zwei unterschiedlichen Zeiten ist dann

$$\begin{aligned}
u_C(t_1) &= U_0 \times e^{-t_1/(RC)} \\
u_C(t_2) &= U_0 \times e^{-t_2/(RC)} \\
\Rightarrow \frac{u_C(t_1)}{u_C(t_2)} &= e^{(t_2-t_1)/(RC)} = \frac{1}{0{,}9} \Leftrightarrow t_2 - t_1 && = RC \times (-\ln 0{,}9) \\
\Leftrightarrow R &= \frac{t_2 - t_1}{C \times (-\ln 0{,}9)} = \frac{600\,\mathrm{s}}{25\,\mu\mathrm{F} \times (-\ln 0{,}9)} = 228\,\mathrm{M}\Omega
\end{aligned}$$

12.3 Ein Relais



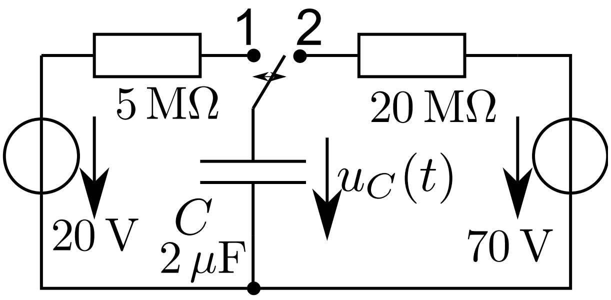
In der angegebenen Relaisschaltung wird der Schalter zum Zeitpunkt $t = 0$ geschlossen. Die Wicklung des Relais ist durch den Widerstand $R = 100\,\Omega$ und die Induktivität $L = 1\,\mathrm{H}$ charakterisiert. Das Relais zieht bei einem Strom von $I_a = 0{,}64\,\mathrm{A}$ an.
Welche Zeit Δt verstreicht demnach zwischen Umlegen des Schalters und dem Schließen des Relais? Geben Sie das Ergebnis in Zahlen und als Formel an!
Lösung: Der Stromverlauf beim Einschalten einer Spannungsquelle an eine Induktivität (ggf. mit Verlusten) ist

$$i(t) = I_0 \left(1 - e^{-t/(L/R)}\right)$$

Mit einem Eingangsstrom von $I_0 = U/R = 1\,\mathrm{A}$ zieht das Relais bei $i(t_1) = 0{,}64\,\mathrm{A}$ an, also

$$\begin{aligned}
i(t_1) &= I_0 \left(1 - e^{-t_1/(L/R)}\right) \\
\Leftrightarrow e^{-t_1/(L/R)} &= \frac{I_0 - i(t_1)}{I_0} \\
\Leftrightarrow t_1 &= -\frac{L}{R} \times \ln\left(\frac{I_0 - i(t_1)}{I_0}\right) \\
&= -10\,\mathrm{ms} \times \ln 0{,}36 = 10{,}22\,\mathrm{ms}
\end{aligned}$$

12.4 Umschalten einer Kapazität



Der Schalter in o.g. Schaltung befindet sich seit langer Zeit in Position 1, bevor er zum Zeitpunkt $t = 0$ für die Dauer von 30 s in Position 2 umgelegt wird, um dann wieder in Position 1 zurückgeschaltet zu werden.

(a) Wie sieht der Verlauf von $u_C(t)$ für $t \geq 0$ aus?
Lösung: Zunächst ist die Kapazität auf $U_0 = 20\,\mathrm{V}$ aufgeladen, wenn der Schalter umgelegt wird. Der Maschenumlauf in der rechten Masche ist dann

$$U = u_C(t) + u_R(t)$$

mit

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \times \left(\int_0^t i(t')\,dt' + Q_0\right)$$

$Q_0 = CU_0 = 4 \times 10^{-5}$ As ist die Anfangsladung. Damit ergibt sich die DGL

$$\begin{aligned}
U &= Ri(t) + \frac{1}{C} \times \left(\int_0^t i(t')\,dt' + Q_0\right) \\
\Rightarrow U - U_0 &= Ri(t) + \frac{1}{C} \times \int_0^t i(t')\,dt'
\end{aligned}$$

die mit dem Ansatz

$$i(t) = I_0 e^{-t/(RC)}$$

gelöst wird. Aus der Anfangsbedingung ergibt sich dann

$$I_0 = \frac{U - U_0}{R}$$

und mit Zahlenwerten ist

$$\begin{aligned} i(t) &= 2{,}5\,\mu\mathrm{A}\, e^{-t/40\,\mathrm{s}} \\ u_c(t) &= 20\,\mathrm{V} + 50\,\mathrm{V}\left(1 - e^{-t/40\,\mathrm{s}}\right) \\ &= 70\,\mathrm{V} - 50\,\mathrm{V} e^{-t/40\,\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Nach 30 s wird nun zurückgeschaltet. Zu diesem Zeitpunkt liegt an der Kapazität die Spannung

$$u_c(30\,\mathrm{s}) = 46{,}38\,\mathrm{V}$$

an. Die Zeitkonstante wird $RC = 10\,\mathrm{s}$ und im Umschaltmoment fließt somit ein Strom von

$$i_c(30\,\mathrm{s}) = \frac{u_c(30\,\mathrm{s})}{5\,\mathrm{M}\Omega} = 9{,}276\,\mu\mathrm{A}.$$

Der Spannungsverlauf nach dieser Zeit ergibt sich also zu

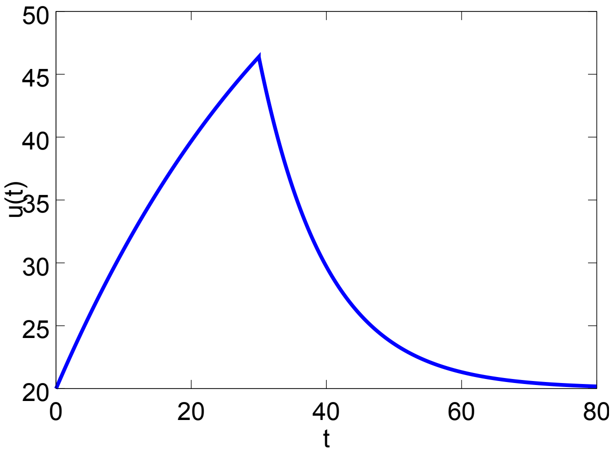
$$\begin{aligned} u_c(t) &= 20\,\mathrm{V} + (u_c(30\,\mathrm{s}) - 20\,\mathrm{V}) \times e^{-t'/10\,\mathrm{s}} \\ &= 20\,\mathrm{V} + 26{,}38\,\mathrm{V} \times e^{-t'/10\,\mathrm{s}} \end{aligned}$$

wobei als Abkürzung eine verschobene Zeit $t' = t - 30\,\mathrm{s}$ eingeführt wurde.

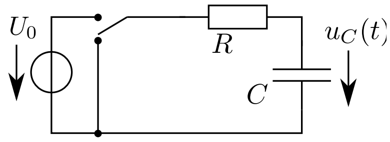
(b) Welche Spannungen $u_c(t)$ liegen bei $t_1 = 5\,\mathrm{s}$ und $t_2 = 40\,\mathrm{s}$ an der Kapazität an?
Lösung:

$$\begin{aligned} u_c(t_1) &= 25{,}88\,\mathrm{V} \\ u_c(t_2) &= 29{,}71\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

(c) Zeichnen Sie den Verlauf von $u_C(t)$ für $0 \leq t \leq 80\,\mathrm{s}$!
Lösung:



12.5 Umschalten am Kondensator

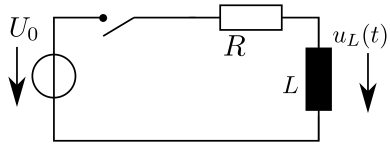


Die Kapazität ist bei Schalterstellung in obiger Position lange Zeit aufgeladen worden und wird nun durch umlegen des Schalters entladen.
Geben Sie alle Ströme und Spannungen bis zu $t = 5RC$ an und zeichnen Sie sie in ein Diagramm (mit ggf. zwei Achsenbeschriftungen)!
Lösung: Das ist nur die normale Entladekurve mit

$$u_c(t) = U_0 \times e^{-t/(RC)}$$
$$i(t) = \frac{U_0}{R} \times e^{-t/(RC)}$$

Auf die Zeichnung wird hier verzichtet, das sollte jeder selber können.

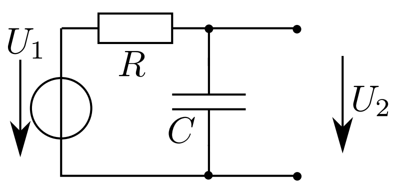
12.6 Umschalten an der Spule

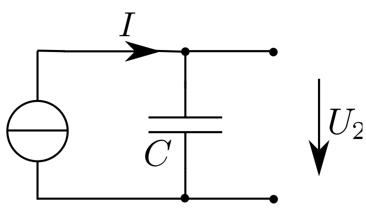


Die zunächst ungeladene Induktivität wird durch Schließen des Schalters bei $t = 0$ geladen.
Geben Sie alle Ströme und Spannungen bis zu $t = 5L/R$ an und zeichnen Sie sie in ein Diagramm (mit ggf. zwei Achsenbeschriftungen)!
Lösung: Das ist nun die einfache Einschaltbedingung der Spule mit

$$u_L(t) = U_0 \times e^{-t/(L/R)}$$
$$i(t) = \frac{U_0}{R} \times \left(1 - e^{-t/(L/R)}\right)$$

12.7 Kondensator an verschiedenen Quellen





An eine RC-Schaltung wie oben gezeigt werden im ungeladenen Zustand verschiedene Quellen angelegt, geben Sie jeweils die Spannungsverläufe an!

(a) Eine konstante Gleichspannung $U_1 = \text{const.}$
Lösung: Dieses ist der übliche e-Funktionsverlauf mit

$$u_C(t) = U_1 \left(1 - e^{-t/(RC)}\right)$$

(b) Eine linear ansteigende Spannung mit $U_1 = U_0 \times t/T$ mit willkürlichem T.
Lösung: Hierzu ist zunächst die Differentialgleichung aufzustellen. Danach ist

$$
\begin{aligned}
U_1 &= U_R + U_C \\
U_0 \frac{t}{T} &= iR + \frac{1}{C} \int_0^t i(t')\, dt' \\
\Rightarrow U_0 \frac{1}{T} &= R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}
\end{aligned}
$$

Die Lösung der DGL besteht aus einem inhomogenen Anteil, der wieder aus der e-Funktion besteht, und einem Ansatz von Typ der rechten Seite, es ist also für den Strom i

$$
\begin{aligned}
i(t) &= I_0 e^{-ct} + I_1 \\
\frac{di}{dt} &= -c I_0 e^{-ct}.
\end{aligned}
$$

Eingesetzt in die obige DGL erhält man also

$$
\begin{aligned}
U_0 \frac{1}{T} &= R(-cI_0 e^{-ct}) + \frac{I_0 e^{-ct} + I_1}{C} \\
\Rightarrow 0 &= R(-cI_0 e^{-ct}) + \frac{I_0 e^{-ct}}{C} & U_0 \frac{1}{T} &= \frac{I_1}{C} \\
\Leftrightarrow c &= \frac{1}{RC} & I_1 &= \frac{U_0 C}{T}
\end{aligned}
$$

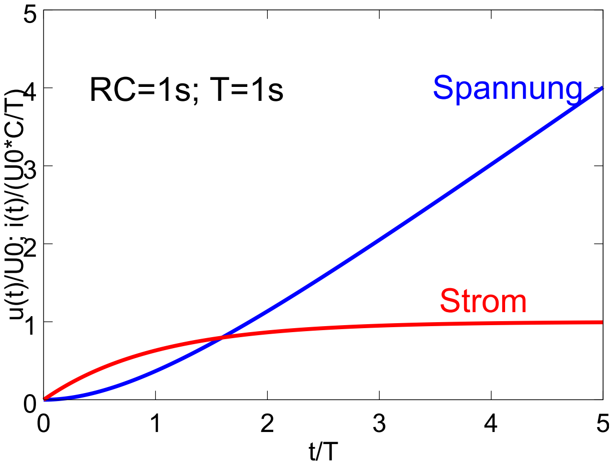
Mit der Forderung, dass bei $t = 0$ noch kein Strom fließt muss dann

$$
\begin{aligned}
i(t=0) &= I_0 + I_1 = 0 \\
\Leftrightarrow I_0 &= -I_1 = -\frac{U_0 C}{T}
\end{aligned}
$$

gelten und das Endergebnis ist

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \frac{U_0 C}{T} \left(1 - e^{-t/(RC)}\right) \\
u_C(t) &= \frac{U_0}{T} \left(t + RCe^{-t/(RC)} - RC\right)
\end{aligned}
$$

Die Verläufe von Strom und Spannung ergeben sich wie dargestellt (Beispielhafte Wahl der Parameter)



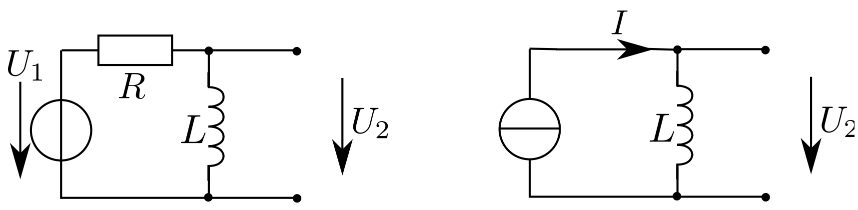
(c) Die Spannungsquelle mit Innenwiderstand U_1 mit R wird durch eine ideale Stromquelle mit konstantem Strom ersetzt.
Lösung: Der konstante Strom liefert dann immer Ladung nach und die Spannung steigt linear an, also

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt \\ &= \frac{it}{C} \end{aligned}$$

(d) Die Spannungsquelle mit Innenwiderstand U_1 mit R wird durch eine ideale Stromquelle linear ansteigendem Strom ($I = I_0 \times t/T$) ersetzt.
Lösung: Der konstante Strom liefert dann immer mehr und mehr Ladung nach und die Spannung steigt nun quadratisch an.

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt \\ &= \frac{1}{C}\int_0^t I_0\frac{t}{T}\,dt = \frac{I_0 t^2}{2CT} \end{aligned}$$

12.8 Spule an verschiedenen Quellen



An eine LR-Schaltung wie oben gezeigt werden im ungeladenen Zustand verschiedene Quellen angelegt, geben Sie jeweils die Spannungsverläufe an!

(a) Eine Konstante Gleichspannung $U_1 = \text{const.}$
Lösung: Dieses ist die normale abfallende e-Funktion mit

$$u_L(t) = U_1 \times e^{-tR/L}$$

(b) Eine linear ansteigende Spannung mit $U_1 = U_0 \times t/T$ mit willkürlichem T.
Lösung: Hier muss nun sinnvollerweise die komplette DGL aufgestellt werden. Es ist dann

$$U_1 = U_R + U_L = Ri + L\frac{di}{dt} = \frac{U_0}{T}t$$

Es ist für den homogenen Lösungsanteil der übliche Ansatz mit

$$i_h(t) = I_e \times e^{-tR/L}$$

zu machen und daraus folgt als Beweis, dass

$$\begin{aligned} RI_e \times e^{-tR/L} - \frac{R}{L}LI_e \times e^{-tR/L} &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= 0 \end{aligned}$$

richtig ist.

Der homogenen Lösung ist der partikuläre hinzuzufügen mit

$$\begin{aligned} i_p(t) &= i_0 + i_1 t \\ \Rightarrow \frac{di_p(t)}{dt} &= i_1 \end{aligned}$$

und das in die DGL eingesetzt führt auf

$$\begin{aligned} \frac{U_0}{T}t &= R\left(i_0 + i_1 t\right) + Li_1 \\ \Rightarrow 0 &= Ri_0 + Li_1, & \frac{U_0}{T}t &= Ri_1 t \\ \Leftrightarrow i_0 &= -\frac{L}{R}i_1, & i_1 &= \frac{U_0}{RT} \\ i_0 &= -\frac{L}{R} \times \frac{U_0}{RT} \end{aligned}$$

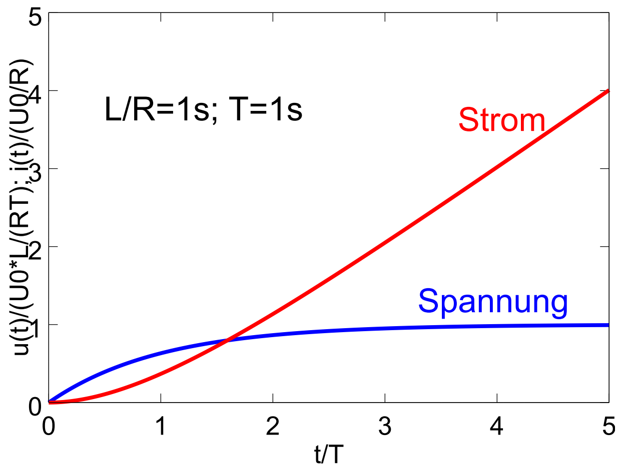
Weiterhin ist die Anfangsbedingung zu beachten, nach der bei $t = 0$ noch kein Strom fließt, also

$$\begin{aligned} i(t) &= i_h(t) + i_p(t) \\ \Rightarrow 0 = i(t = 0) &= i_h(t = 0) + i_p(t = 0) \\ \Leftrightarrow 0 &= I_e + i_0 \\ \Leftrightarrow I_e &= -i_0 = \frac{L}{R} \times \frac{U_0}{RT} \\ \Rightarrow i(t) &= \frac{U_0}{RT}\left(\frac{L}{R} \times e^{-tR/L} - \frac{L}{R} + t\right). \end{aligned}$$

Die Spannung ist dann

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = \frac{U_0 L}{RT}\left(1 - e^{-tR/L}\right)$$

Die Verläufe von Strom und Spannung ergeben sich wie dargestellt (Beispielhafte Wahl der Parameter)



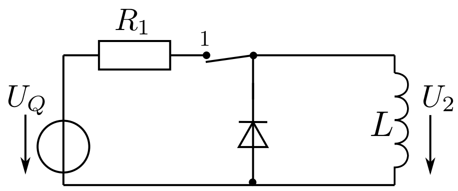
(c) Die Spannungsquelle mit Innenwiderstand U_1 mit R wird durch eine ideale Stromquelle mit konstantem Strom ersetzt.
Lösung: Hiermit wird dann (durch einen unendlichen Spannungsstoß am Anfang) der Strom konstant auf I_0 getrieben, die Spannung über die Induktivität ist nach dem Stoß wieder Null.

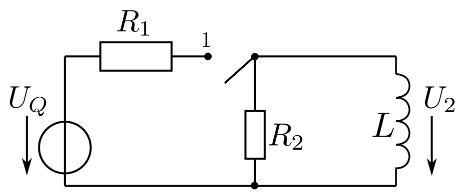
(d) Die Spannungsquelle mit Innenwiderstand U_1 mit R wird durch eine ideale Stromquelle linear ansteigendem Strom ($I = I_0 \times t/T$) ersetzt.
Lösung: Hier gilt

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = L\frac{I_0}{T}$$

die Spannung steigt kontinuierlich an.

12.9 Ladevorgänge, 7 Punkte





Der Schalter wird zum Zeitpunkt $t = 0$ in die Position "1" gelegt, es wird dadurch die zunächst stromlose Spule L geladen. Nach einer Zeit $t = t_1$ wird der Schalter umgelegt, so dass die Spule L über die Diode entladen wird. Das linke Schaltbild gibt ein mögliches Prinzip an, während im Rechten die Diode durch ihren Widerstand R_2 ersetzt wurde. Dieses rechte Schaltbild ist ggf. zur Berechnung zu verwenden.

(a) Geben Sie den formelmäßigen Zusammenhang für Strom und Spannung durch bzw. an der Induktivität L für den Zeitraum $0 < t < t_1$ an!
Lösung: Das ist die einfache Ladekurve, so dass die Spannung

$$I = \frac{U_Q}{R_1}\left(1 - e^{-t/(L/R_1)}\right)$$

beträgt. Die Spannung ist dann

$$U_2 = U_Q \times e^{-t/(L/R_1)}$$

Bewertung: (2) Punkte für die richtigen Formeln

Im nun folgenden sind die Werte $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 10\,\Omega$ und $L = 1\,\text{mH}, U_Q = 10\,\text{V}$ anzunehmen.

(b) Berechnen Sie die Spannung U_2 an L nach $t = t_1 = 2\,\text{ms}$ vor Öffnen des Schalters!
Lösung: Die Zeitkonstante ist genau $\frac{L}{R_1} = 1\,\text{ms}$. Daher beträgt die Spannung $U_1 = 10\,\text{V} \times \frac{1}{e^2} = 1{,}353\,\text{V}$. Damit ist $U_2 = 8{,}646\,\text{V}$.
Bewertung: (1) Punkt

(c) Bei $t_1 = 2\,\text{ms}$ wird der Schalter umgelegt. Geben Sie die Spannung U_2 im Moment direkt nach dem Umschalten an! (Das rechte Schaltbild ist zu verwenden)
Lösung: Durch die Spule fließt nun ein Strom von

$$I(t_1) = \frac{U_Q}{R_1} \times \left(1 - \frac{1}{e^2}\right) = 8{,}646\,\text{A}$$

Der zunächst weiter fließen will. Dieser verursacht daher über einen Widerstand von $R_2 = 10\,\Omega$ einen Spannungsimpuls von $U_2 = -86{,}46\,\text{V}$
Bewertung: (1) Punkt.

(d) Geben Sie nun den Verlauf der Spannung U_2 für $t > t_1$ an!
Lösung: Auch dieses ist wieder eine e-Funktion. Nun aber mit einer anderen Zeitkonstante $\tau = L/R_2 = 100\,\mu\text{s}$:

$$U_2 = 86{,}46\,\text{V} \times e^{-(t-t_1)/100\,\mu\text{s}}$$

Bewertung: (1) Punkt.

(e) Welche Energie wurde in R_2 insgesamt umgesetzt, wenn der Schalter nun für lange Zeit in der geöffneten Position verbleibt?
Lösung:

Das einfachste ist zu berechnen, welche Energie die Spule zum Zeitpunkt des Umschaltens hatte. Diese Energie wird dann komplett in R_2 umgesetzt.

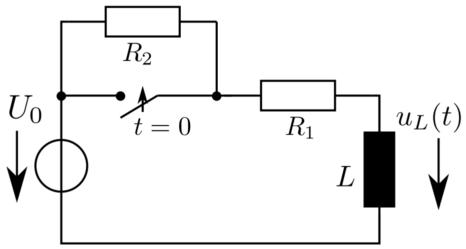
Der Aufladevorgang auf $I = 8{,}646\,\text{A}$ hat

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = 38{,}12\,\text{mJ}$$

auf die Spule gebracht. Dieses wurde komplett in R_2 versenkt.

Bewertung: (2) Punkt

12.10 Ladevorgänge, 10 Punkte



Mit geöffnetem Schalter treibt die Spannungsquelle schon für lange Zeit einen Strom durch R_1,R_2,L. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter geschlossen.

(a) Geben Sie Strom und Spannung an allen Elementen vor Schließen des Schalters an! (2 Punkte)
Lösung: Hier ist dann

$$I = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

$$U_L = 0, \qquad U_1 = \frac{U_0 R_1}{R_1 + R_2}, \qquad U_2 = \frac{U_0 R_2}{R_1 + R_2}$$

(je 0,5 Punkte pro Ergebnis)

(b) Nun wird der Schalter geschlossen und damit wird R_2 überbrückt. Geben Sie alle Ströme und Spannungen nach nun wiederum unendlich langer Zeit an! (1 Punkt)
Lösung: Hier fließt nun der Strom $I = U/R_1$ und die Spannungen sind

$$U_L = 0, \qquad U_1 = U_0.$$

(1 Punkt)

(c) (*) Nun wird der Schalter geschlossen und damit wird R_2 überbrückt. Geben Sie den Spannungsverlauf $u_l(t)$ für $t \geq 0$ an und zeichnen Sie ihn! (4 Punkte)
Lösung: Aus dem Maschenumlauf folgt sofort

$$u_1 + u_L = U_0$$
$$iR_1 + L\frac{di}{dt} = U_0$$

(1 Punkt)

Die DGL ist lösbar mit dem Ansatz

$$i(t) = I_0 \times e^{-t/(L/R_1)} + I_1$$

(1 Punkt)

Es fehlt die Anfangsbedingung, die ist aber über den Strom bei $t = 0$ mit $I_0 + I_1 = \frac{U_0}{R_1+R_2}$ gegeben und nach unendlich langer fließt fließt der Strom $I_1 = \frac{U_0}{R_1}$, womit dann

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{U_0}{R_1 + R_2} - \frac{U_0}{R_1} = U_0 \frac{R_1 - R_1 - R_2}{R_1(R_1 + R_2)} \\ &= -U_0 \frac{R_2}{R_1(R_1 + R_2)} \end{aligned}$$

folgt.

Die Spannung errechnet sich nun aus

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = \frac{U_0 R_2}{R_1 + R_2} \times e^{-t/(L/R_1)}$$

(1 Punkt)

Es handelt sich hier um eine abfallende $e - Funktion$ **(1 Punkt für die Zeichnung)**

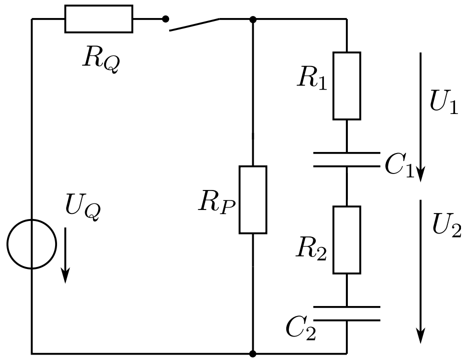
(d) Die Induktivität habe einen Wert von $L = 1\,\mathrm{H}$ und werde nach nun wiederum sehr langer Zeit mit einem Draht (mit Widerstand) überbrückt (nicht im Schaltbild gezeigt). Sie können den Rest der Schaltung U_0,R_1,R_2 vernachlässigen. Beschreiben Sie in mindestens einem vollständigen Satz (ggf. mit Skizze), wie sich der Strom durch den Überbrückungsdraht verhält. (2 Punkte)
Lösung: Der Strom wird zunächst für eine unendlich kurze Zeit unverändert nun durch den Draht getrieben. Danach fällt er nach Maßgabe des Widerstand des Drahtes und der Induktivität in Form einer e-Funktion mit negativem Exponenten. **(2 Punkte)**

(e) Nach $t' = 10\,\mathrm{s}$ nach dem Überbrückungsvorgang ist der Strom auf die Hälfte abgefallen. Wie groß ist der Widerstand des Drahtes? (1 Punkt)
Lösung: Es gilt also hier

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= e^{-t'/(L/R)} \\ \Leftrightarrow t'R/L &= \ln(2) \\ \Leftrightarrow R &= \frac{L}{t'}\ln(2) \approx 0{,}07\,\Omega. \end{aligned}$$

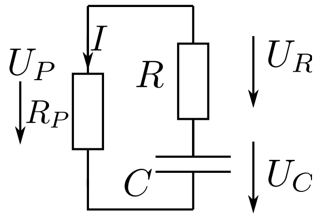
(1 Punkt)

12.11 Ladevorgänge, 14 Punkte



Zwei Kondensatoren (Kapazitäten mit Innenwiderständen C_1, R_1 und C_2, R_2) werden bei geschlossenen Schalter geladen. Zunächst seien die Kapazitäten ungeladen.

(a) Ersetzen Sie die zwei Kondensatoren aus Kapazitäten mit Innenwiderständen C_1, R_1 und C_2, R_2 durch einen zusammengefassten mit R und C, geben Sie die Ersatzschaltung und natürlich R und C an! (3 Punkte)
Lösung: Das ist die Reihenschaltung



mit

$$R = R_1 + R_2$$
$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Bewertung: 1 Punkt für jeden Wert und eines für das ESB

(b) Auf welche Spannung ist C nachdem der Schalter lange schlossen war aufgeladen? (1 Punkt)
Lösung:
Das ist sicherlich

$$U_C = U_Q \frac{R_P}{R_Q + R_P}$$

Bewertung: 1 Punkt

(c) Der Schalter wird nun geöffnet. Geben Sie Strom und Spannung über bzw. durch R_P an! Zeichnen Sie in ein Schaltbild die beteiligten Elemente und Spannungen und Ströme so ein, dass die Pfeilrichtung zu positiven Werten führt. Sie können die oben eingeführten Abkürzungen R und C verwenden. (3 Punkte)
Lösung: Das ist einfach die Entladung der Kapazität C über R und R_P mit

$$U_C(t) = U_Q \frac{R_P}{R_Q + R_P} e^{-t/(C(R+R_P))}$$

Und damit sind Strom und Spannung an bzw. durch R_P

$$U_P = U_Q \frac{R_P}{R_Q + R_P} \times \frac{R_P}{R + R_P} e^{-t/(C(R+R_P))}$$
$$I_P = U_Q \frac{R_P}{R_Q + R_P} \times \frac{1}{R + R_P} e^{-t/(C(R+R_P))}$$

Bewertung: 1 Punkt für jeden Wert und einen für die richtigen Pfeile im ESB.

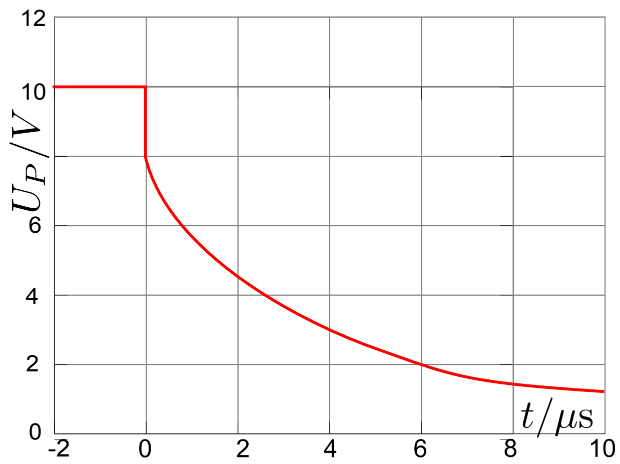
(d) Mit $R_1 = R_2 = 0{,}5\,\Omega$, $R_P = R_Q = 4\,\Omega$, $C_1 = C_2 = 2\,\mu\text{F}$, $U_Q = 20\,\text{V}$ zeichnen Sie den Spannungsverlauf über R_P von $1\,\mu\text{s}$ vor bis $10\,\mu\text{s}$ nach öffnen des Schalters! (Keine Folgefehler! Wenn Sie obigem Ergebnis misstrauen, Rechnen Sie mit Zahlen nochmals) (3 Punkte)

Lösung: Es ergeben sich:

$$R = 1\,\Omega, \qquad C = 1\,\mu\text{F}$$

$$U_P(t-) = 10\,\text{V} \qquad U_P(t+) = U_P(t-)\frac{R_P}{P + R_R} = 8\,\text{V}$$

$$\tau = C(R + R_P) = 5\,\mu\text{s}$$



Bewertung: 3 Punkte für den richtigen Graphen und auch richtige Werte und Skalierungen.

(e) Geben Sie allgemein und formelmäßig die Spannungen U_1 und U_2 unmittelbar nach Schließen des Schalters und nachdem der Schalter für sehr sehr lange Zeit geschlossen war an! (4 Punkte)

Lösung: Unmittelbar nach Schließen des Schalters sind C_1 und C_2 Kurzschlüsse und nur die Widerstände bestimmen das Geschehen. Es liegt dann der Spannungsteiler mit

$$U_1 + U_2 = U_Q\left(\frac{\frac{R_P(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_P}}{R_Q + \frac{R_P(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_P}}\right)$$
$$= U_Q\frac{R_P(R_1 + R_2)}{R_Q(R_1 + R_2 + R_P) + R_P(R_1 + R_2)}$$

vor und damit ist dann

$$U_1 = U_Q\frac{R_P R_1}{R_Q(R_1 + R_2 + R_P) + R_P(R_1 + R_2)}$$
$$U_2 = U_Q\frac{R_P R_2}{R_Q(R_1 + R_2 + R_P) + R_P(R_1 + R_2)}$$

.

Nach langer Zeit nehmen die Kapazitäten keine Ladung mehr auf, durch sie fließt kein Strom mehr. Es greift erstmal der Spannungsteiler aus R_Q und R_P

$$U_1 + U_2 = U_Q \frac{R_P}{R_Q + R_P}$$

verkettet mit der Spannungsteilung durch C_1 und C_2 wodurch sich dann

$$U_1 = U_Q \frac{C_2}{C_1 + C_2} \frac{R_P}{R_Q + R_P}$$
$$U_2 = U_Q \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{R_P}{R_Q + R_P}$$

ergibt.

je 1Punkte pro Ergebnis