# Angewandte Feld & Potentialtheorie

Beispiele: Skalare Funktionen

$$\Rightarrow f(x,y) = x^2 + y^2 \Leftarrow$$
$$f(x,y) = x + y$$
von 2 Dimensionen

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$
3-Dimensional

Was, wenn man die Steigung entlang einer (beliebigen) Kurve berechnen möchte

1. Schritt: Parametrisierung der Kurve

$C: \quad x = y = t \qquad t$: Parameter

2.) Definiere die Funktion entlang der Kurve, also mit dem Parameter $t$

$$f_{\text{ang }c} = f(z) = x^2 + \underset{x^2}{\underbrace{y^2}} = f(t) = 2t^2$$

3.) Ableitung nach $t$

$$\frac{d f_{\text{ang }c}}{dc} = \frac{d f(t)}{dt} = 4t$$

nicht berücksichtigt ist, dass ein Einheitsschritt in Richtung $t$, also entlang der Diagonalen länger ist als ein Schritt in $x$ oder $y$ alleine.

Steigung entlang eines Kreises um den Ursprung (intuitiv klar: Steigung ist Null)

$$C: \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$f_{\text{ang Kreis}}(x,y) = x^2 + y^2 = r^2 = f(r)$$

Beispiel für die mathematische Anwendung: eine noch einfachere Funktion: $f(x,y) = x + y = x + \sqrt{r^2 - x^2}$

Ableitung nach $x$ $\quad \frac{d(x+\sqrt{r^2-x^2})}{dx} = 1 + \frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$

$\Rightarrow$ An den Rändern der Funktion, also

$x = r \rightarrow$ Ableitung $\rightarrow \infty$

$\Rightarrow$ Suche eine Darstellung, die besser zum Kreis passt.

$\Rightarrow$ In diesem Fall: Polarkoordinaten

Funktionen umschreiben in Polarkoordinaten

$f(x,y) = x^2 + y^2 \rightarrow f(r,\varphi) = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$

$f(x,y) = x + y \longrightarrow f(r,\varphi) = r\cos\varphi + r\sin\varphi = r(\cos\varphi + \sin\varphi)$

Kreis heißt: keine Änderung in $r$, nur Änderung in $\varphi \leftrightarrow \frac{d}{d\varphi}$

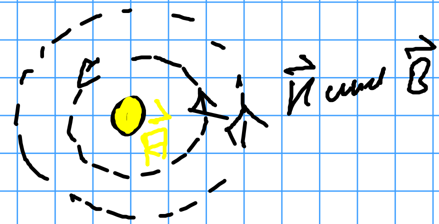
$\frac{d}{d\varphi} \rightarrow 0$

$\frac{d}{d\varphi}\left(r(\cos\varphi + \sin\varphi)\right) = r\cdot(-\sin\varphi + \cos\varphi)$

Für wirklich die Steigung entlang des Kreises muss man rechnen

$\frac{1}{r}\frac{d}{d\varphi} \cdots \quad = -\sin\varphi + \cos\varphi$

# Vektorpotential




Beispiel: Leiter mit Stromdichte in z-Richtung, also

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J_z \end{pmatrix}$$

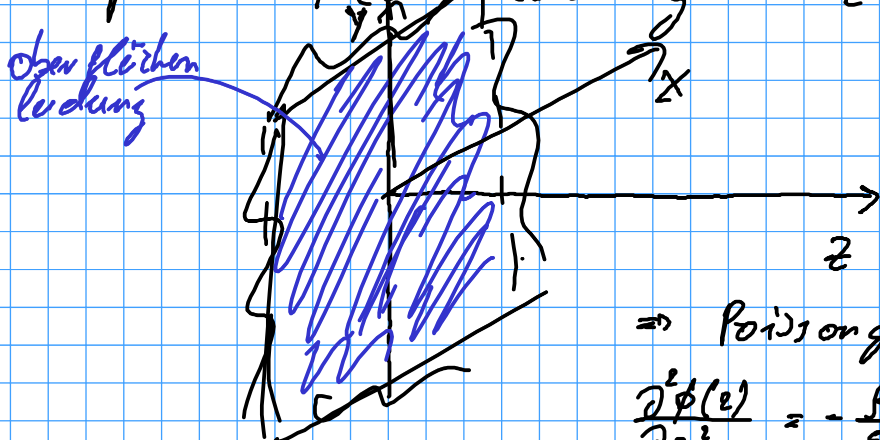
$$\Rightarrow \quad \Delta \vec{A} = -\mu \cdot \vec{J} \Rightarrow \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu \cdot 0$$

$y$: $= 0$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -\mu J_z$$

A hat nur eine z-Komponente

## Beispiele Flächenladung bei $z = 0$




Es ist egal auf welcher x, y-Koordinate ich mich befinde.

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

$\Rightarrow$ Poissongleichung wird zu

$$\frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial z^2} = -\frac{\rho_s}{\varepsilon} \cdot \delta(z)$$

$\rho_s$: Oberflächenladungsdichte

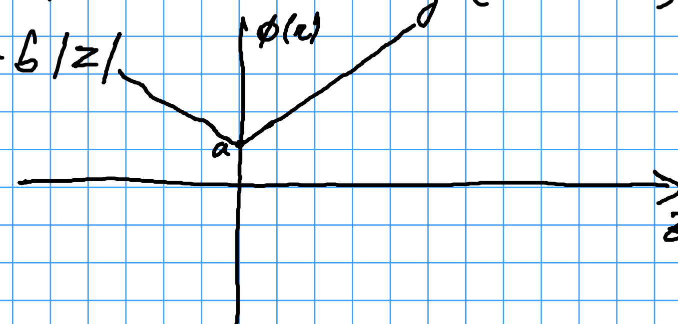
$$\delta(z) = \begin{cases} 1 & z = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

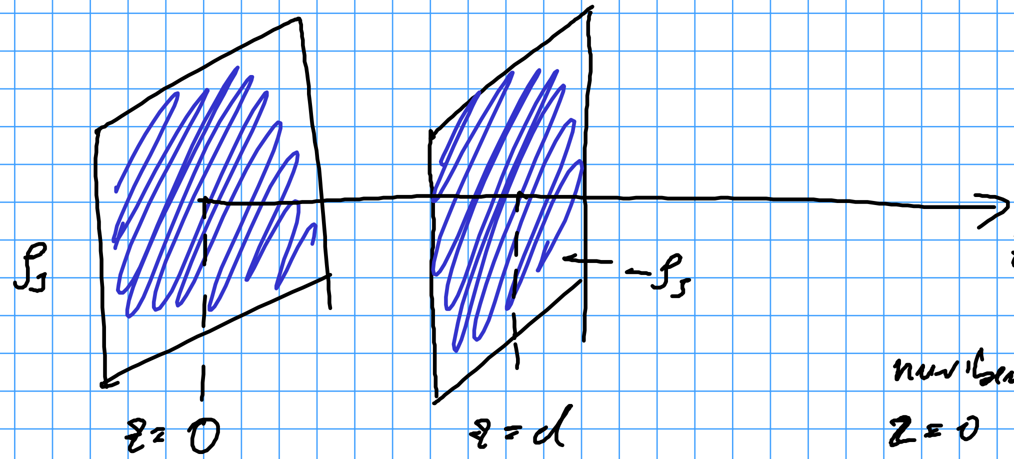
bis auf an $z = 0$ gilt hier

$$\frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial z^2} = 0$$

$\Rightarrow$ $\phi$ muss Funktion sein, deren 2. Ableitung (bei $z \neq 0$) Null ist

$$\phi(z) = a + b|z|$$






nur Berechnen zwischen $z = 0$ und $z = d$

$\phi(z) = a + b \cdot |z|$ $\qquad$ $\phi'(z) = -\phi(z-d) = a - b|z-d|$

$$\phi_{ges} = \phi(z) + \phi'(z) = 2a + b(|z| - |z-d|)$$

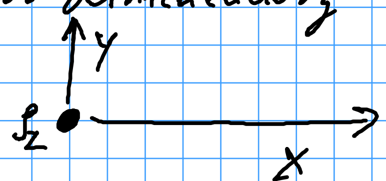
rechts links der Platte

$$= 2a + b(2z + d)$$

$$= \underbrace{2a + b \cdot d}_{\text{Null}} + 2 \cdot b \cdot z \longrightarrow 2b \cdot z$$

Elektrisches Feld $-\frac{\partial \phi}{\partial z} = -2b = E_z$ ; $E_x = E_y = 0$

Feld einer Linienladung




$\rho_z$ : Linienladung

$\frac{\partial}{\partial z} = 0$

$$\frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y^2} = -\frac{\rho_z}{\varepsilon}$$

Lösungsansatz: $\phi(x,y) = a + \ln\sqrt{x^2+y^2} + cx + dy + exy$

1. Ableitung $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x + c + e \cdot y$

$\frac{d \ln(t)}{dt} = \frac{1}{t}$ $\qquad$ $= \frac{x}{x^2+y^2} + c + ey$

$\frac{d\sqrt{t}}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$

2. Ableitung $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{x(-1) \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$

$$= \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0$$

was zu zeigen war,

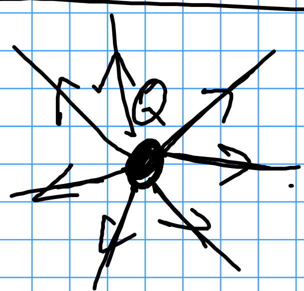
denn $\Delta\phi = 0$ wenn nicht $x = y = 0$

Forderung $\phi(\infty) = 0$

$$\Rightarrow a = c = d = e = 0$$

$$\phi(x,y) = b \cdot \ln\sqrt{x^2+y^2}$$

## Gaus'ches Gesetz

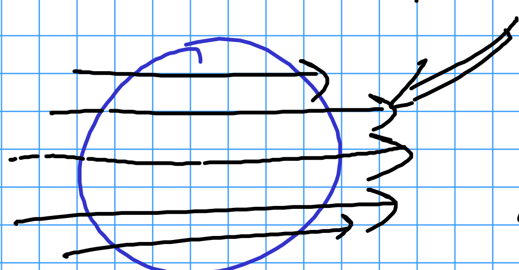



$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \qquad \oint_{\partial V} \vec{D}\, d\vec{s} = 0$

Wenn man Quellen hat, gehen die Feldlinien von der Quelle aus nach Außen

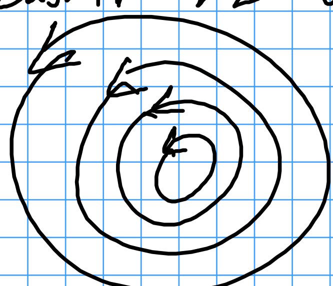
Wenn man keine Quellen hat, also $\nabla\vec{D} = 0$

$$\oint_{\partial V} \vec{D}\, d\vec{s} = 0$$



Es gehen so viele Feldlinien durch die Berandung in das Volumen, wie auch wieder nach außen gehen.

Damit $\nabla\vec{D} = 0$ immer gilt, müssen Feldlinien geschlossen sein.

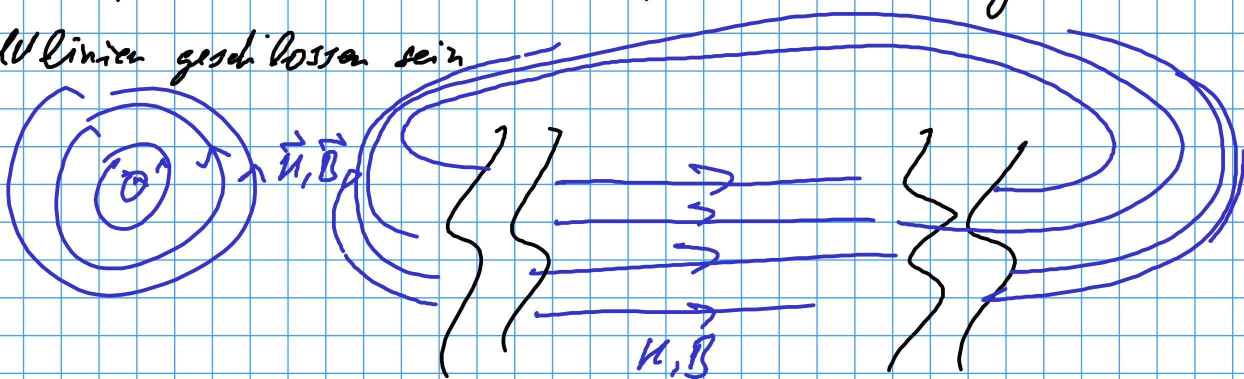


Damit es im quellenfreien Raum ein elektrisches Feld gibt, muss eine Wirbelerzeugung vorliegen, die ist aber nur mit $\frac{\partial B}{\partial t}$ im zeitlich veränderliche Feld vorhanden.

$\Rightarrow$ ohne Ladungen kein elektrostatisches Feld.

Magnetisches Feld: $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ; $\oint_{\partial V} \vec{B}\, d\vec{s} = 0$

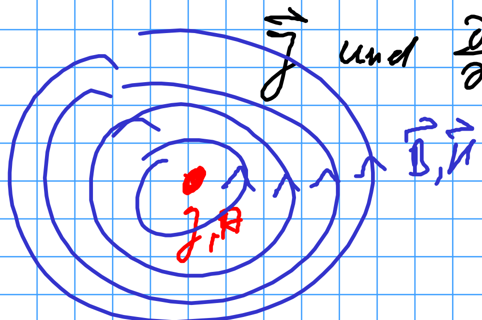
Damit das Feld nicht Null wird, braucht man eine Ursache für Wirbel, und wenn man die hat, müssen die magnetischen Feldlinien geschlossen sein




## Ampere'sches Gesetz

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$\vec{J}$ und $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ erzeugen Wirbel im Magnetischen Feld




## Faraday'sches Gesetz

Wirbel des elektrischen Feldes $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

sind die zeitliche Änderungen des magnetischen Feld

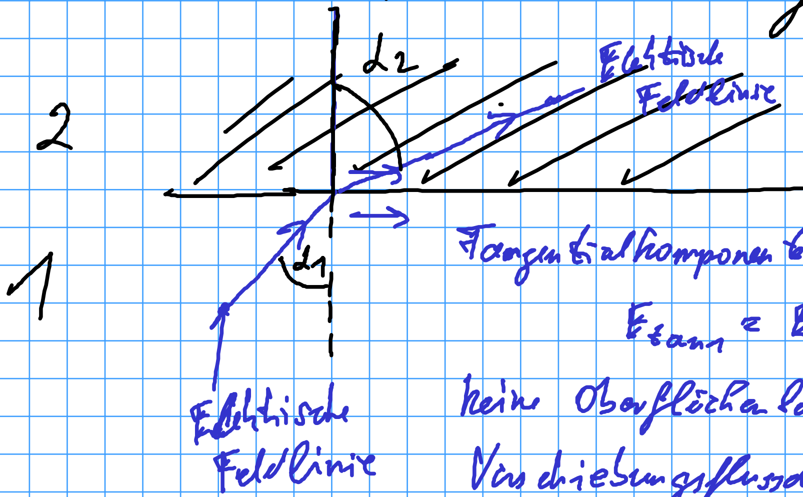
→ <u>Induktionsgesetz</u>


Magnetisches Feld
Änderung: $\vec{H}$ wird größer.

Magnetisches Feld versucht sich bzw. seine Größe zu erhalten und es wird ein Strom induziert, der so gerichtet ist, dass er der Änderung entgegenwirkt.

# Randbedingungen

## Elektrostatik: Brechung (Knick) von Feldlinien




Tangentialkomponenten der el. Feldstärke müssen stetig sein

$$E_{tan1} = E_{tan2} = E_1 \sin\alpha_1 = E_2 \cdot \sin\alpha_2$$

keine Oberflächenladungen: Normalkomponenten der Verschiebungsflussdichte müssen stetig sein, also

$$D_{n1} = D_{n2} = \varepsilon_1 E_1 \cdot \cos\alpha_1 = \varepsilon_2 E_2 \cdot \cos\alpha_2$$

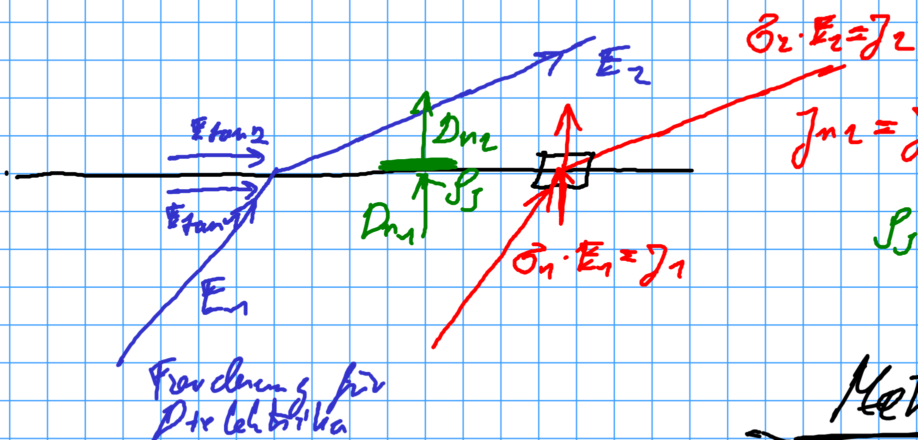
Dividiere die Gleichungen durcheinander

$$\frac{E_1 \sin\alpha_1}{\varepsilon_1 E_1 \cos\alpha_1} = \frac{E_2 \sin\alpha_2}{\varepsilon_2 E_2 \cos\alpha_2} = \frac{1}{\varepsilon_1}\tan\alpha_1 = \frac{1}{\varepsilon_2}\tan\alpha_2$$

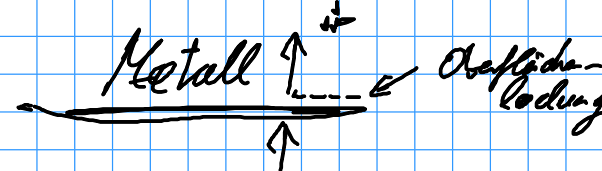
$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

Beide Materialien leiten und sind Dielektrika, also

$\varepsilon_1, \sigma_1$ und $\varepsilon_2, \sigma_2$




$\rho_s$: es wird sich eine Oberflächenladung heraus bilden




tang. $E$ $\qquad E_1 \cdot \sin\alpha_1 = E_2 \cdot \sin\alpha_2$

norm. $J$ $\qquad J_1 \cdot \cos\alpha_1 = J_2 \cdot \cos\alpha_2 \Leftrightarrow \sigma_1 \cdot E_1 \cdot \cos\alpha_1 = \sigma_2 E_2 \cdot \cos\alpha_2$

$$D_1 \cos\alpha_1 = D_2 \cos\alpha_2 + \rho_s \Leftrightarrow \varepsilon_1 E_1 \cos\alpha_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\alpha_2 + \rho_s$$

Erste Leiter: $\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ Leitfähigkeiten bestimmen den Winkel

$$\varepsilon_1 \cos\alpha_1 = \varepsilon_2 \frac{\sin\alpha_1}{\tan\alpha_2} + \rho_s$$ Sprung durch $\rho_s$

$$\cancel{\Leftrightarrow} \quad \frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad ↯↯$$

# Dielektrische Eigenschaften

$$D = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot E \rightarrow \text{chi}$$ Polarisierbarkeit
$$= \varepsilon_0 \cdot (1+\chi) \cdot E$$

Frequenzabhängig $D(\omega) = \varepsilon_0 (1+\chi(\omega)) \cdot E(\omega)$

## Resonatormodell (im Frequenzbereich)

mit $$\chi(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\gamma\omega}$$

$\omega_0$: Resonanzfreq.
$\gamma$: Dämpfungsfaktor
$\omega_p$: Amplitudenfaktor

## Komplexe relative Dielektrizitätszahl

$\varepsilon_r = \varepsilon_r' + j\varepsilon_r''$ $\varepsilon_r'$ Realteil; $\varepsilon_r''$ Imaginärteil

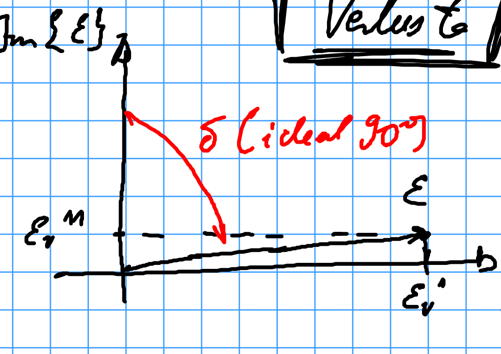
Plattenkondensator: $C = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_r' + j\varepsilon_r'') \cdot \frac{A}{d}$

Komplexe WS-Rechnung $I = j\omega \cdot C \cdot U$

$$\Rightarrow I = \underbrace{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r' \cdot \frac{A}{d} \cdot U \cdot j\omega}_{\text{Wirkung einer Kapazität}} - \underbrace{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r'' \cdot \frac{A}{d} \cdot U \cdot \omega}_{\text{Widerstand, passiv mit } \varepsilon_r'' < 0}$$

**Verluste** im Dielektrikum

$\varepsilon_r''$ kleiner $\varepsilon_r'$




$\Rightarrow \tan\delta = \frac{\varepsilon_r''}{\varepsilon_r'}$ als Maß für die Verluste.

Lichtgeschwindigkeit $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}$ im Vakuum
299 792 458 $\frac{m}{s}$

im Material $c_m = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r' \cdot \mu_0}}$

bei uns kann $\varepsilon_r'(\omega) = 0$ werden, bei einem bestimmten $\omega$

dann – was? Das ist keine

Geschwindigkeit, weil $\varepsilon_r'(\omega)$ nur für einen

eingeschwungenen Zustand gilt

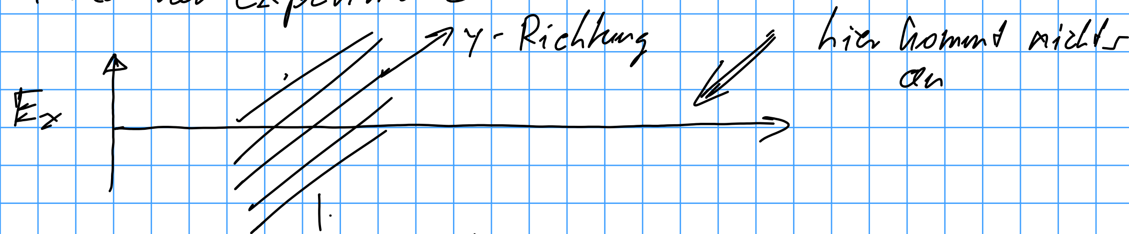
## Zur Ebenen Welle (zu S. 60)

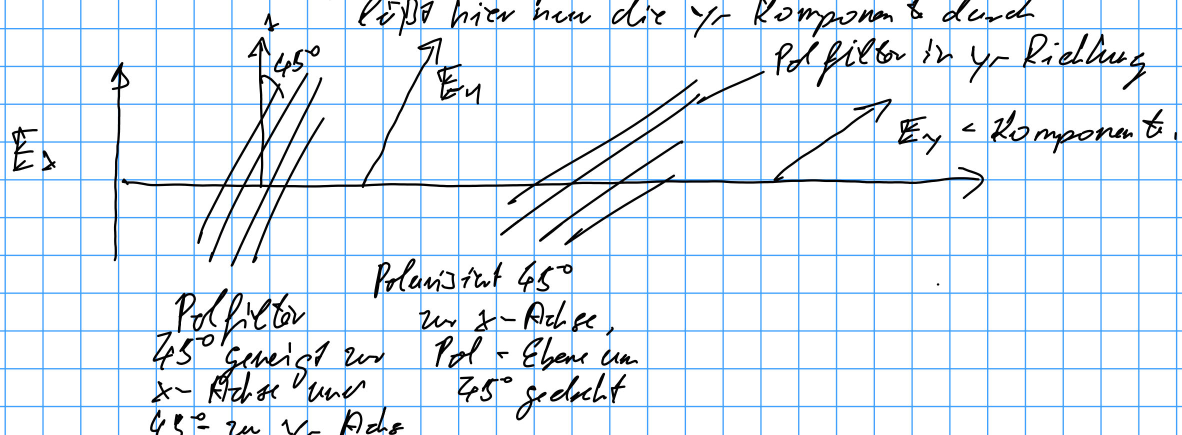
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{H} = \frac{k}{\omega\mu}\cdot\begin{pmatrix} -E_y \\ E_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}\cdot\vec{H} = \frac{k}{\omega\mu}\cdot(-E_yE_x + E_yE_x) = 0$$

also $\vec{H} \perp \vec{E}$ und wegen $\frac{k}{\omega\mu}$ E und H in Phase.

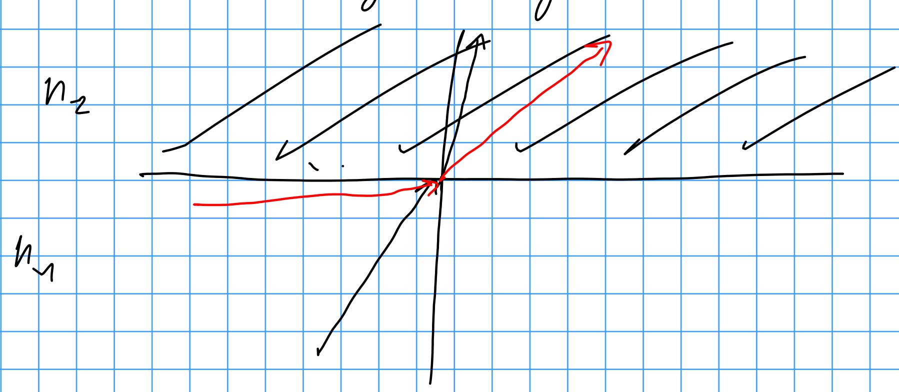
## Gedankenexperiment

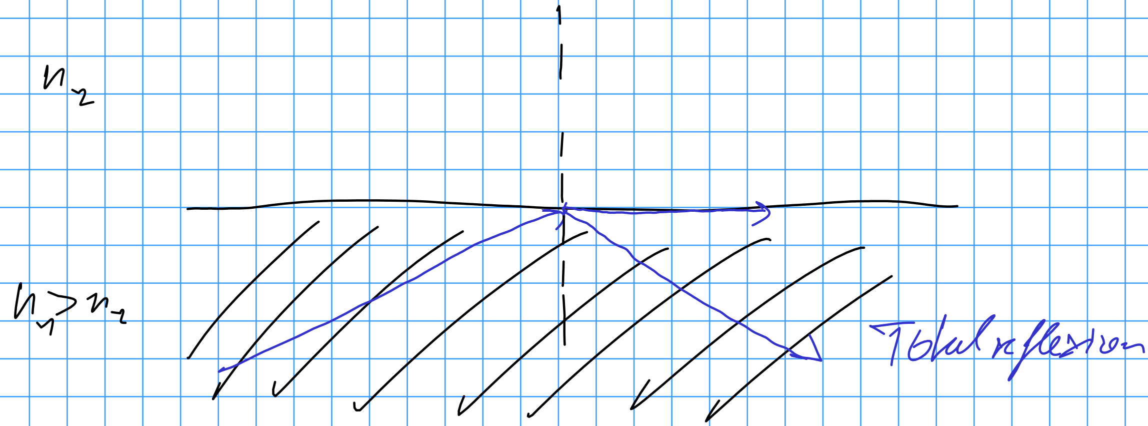


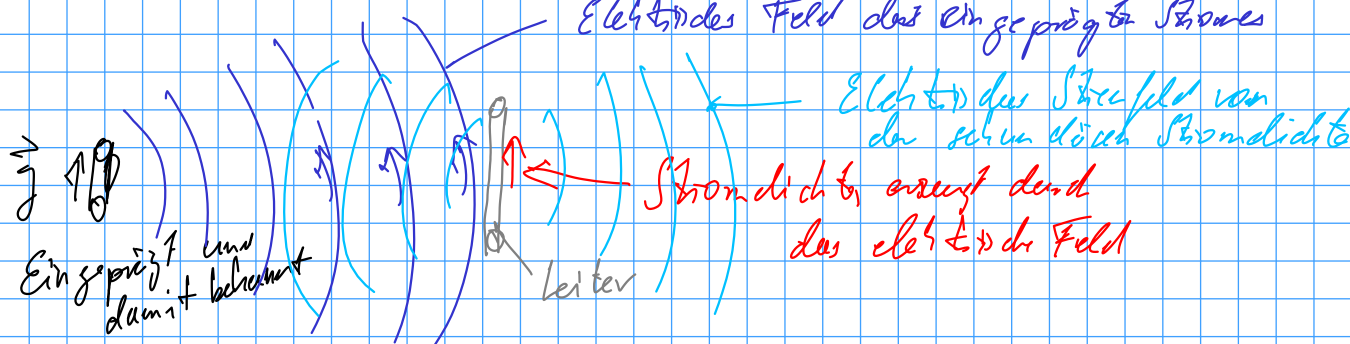




---

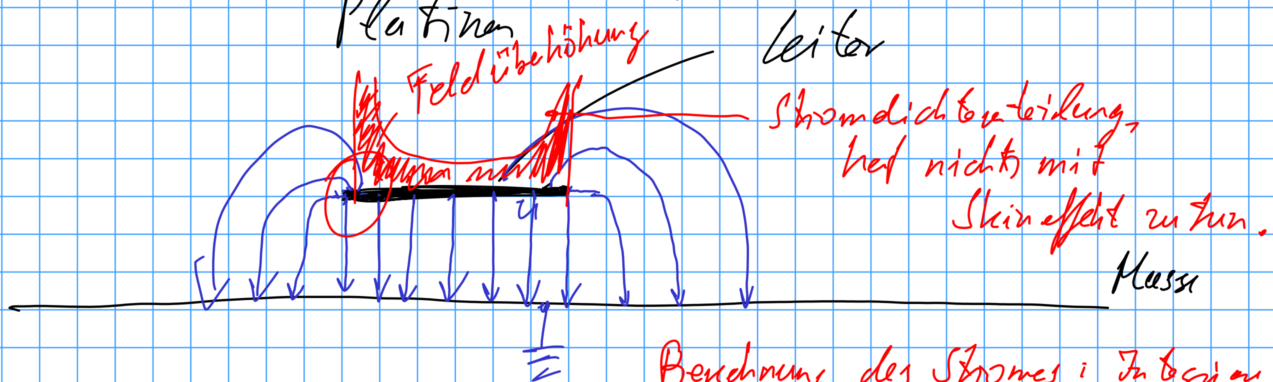
## Schräger Einfall





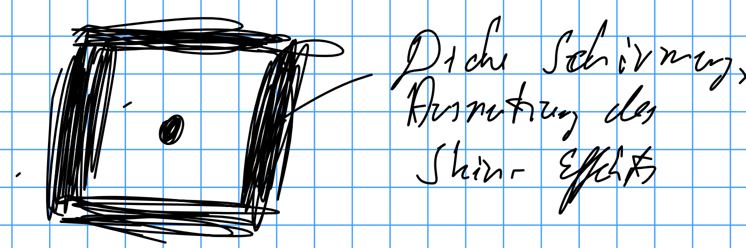

## Zur Randbedingung bei Leitungen auf Platinen



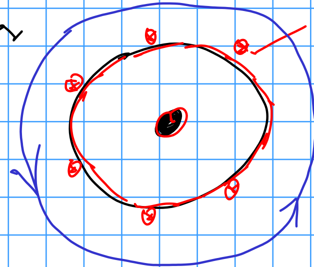

Berechnung des Stromes: Integriere die Stromdichte über die Querschnittsfläche des Leiters.

## Warum strahlen Leiter nicht?

- Schirmung



– Beispiel Koax-Leiter



Stromdichte in Blattebene hinein vollkommen gleichmäßig über Umfang verteilt!

⇒ Symmetrie

← Umlauf für magnetisches Feld

Außen kein Feld wegen perfekter Zylindersymmetrie

Beispiel Mikrostreifenleitung

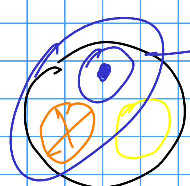

unsymmetrisch

Stromdichte Real

Massefläche, wie Spiegelfläche

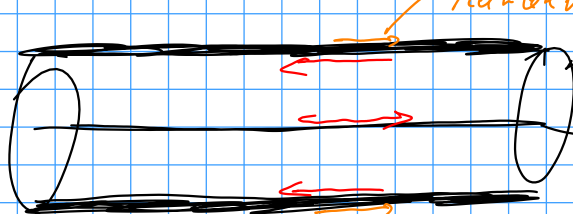
gespiegelte Leitung

⇒ sehr symmetrische Anordnung und damit keine Abstrahlung.



symmetrisch, Felder nach außen kaum sichtbar

Außenleiter außen Mantelwellen

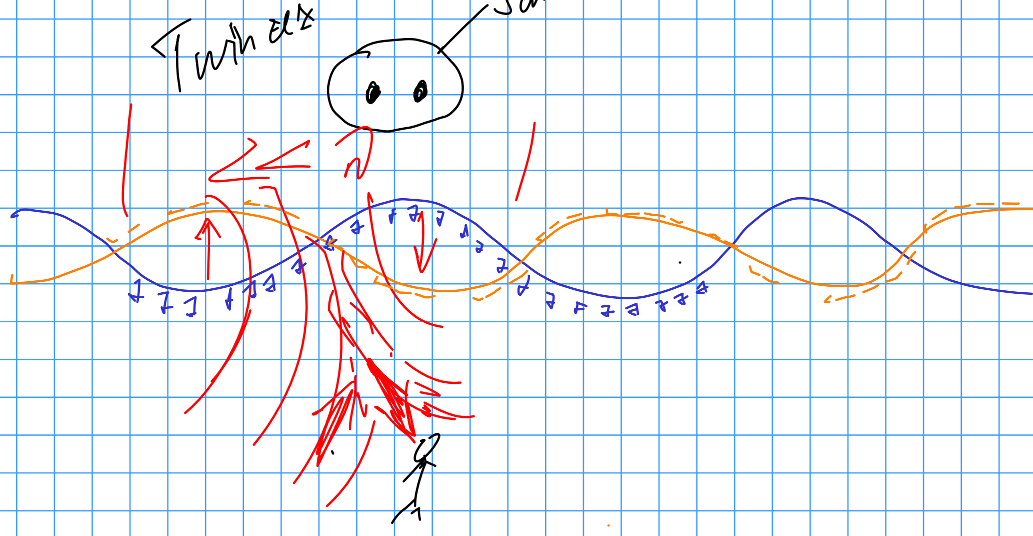


Außenleiter

Innenleiter

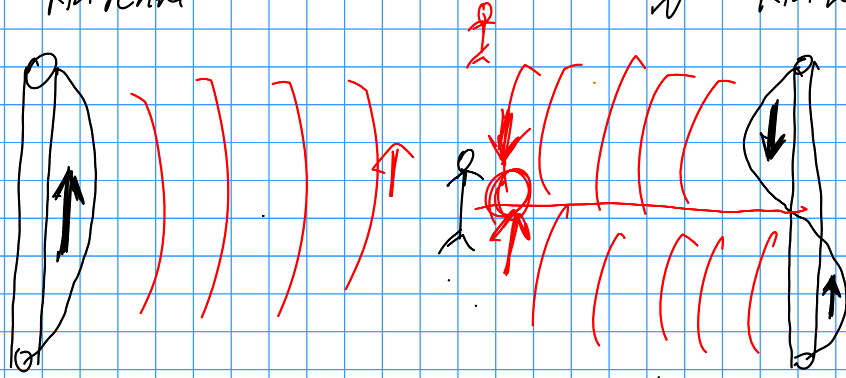
Twinax

Schirm



# Antenne

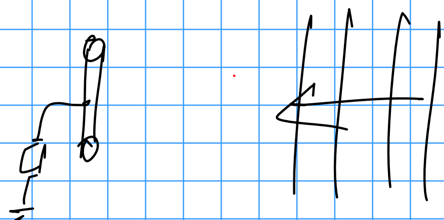
$\lambda/2$ - Antenne  $\lambda$ - Antenne



$P = f(I)$ Funktion des Stromes

$\Rightarrow$ P in maximaler Richtung aufgenommen über eine Fläche

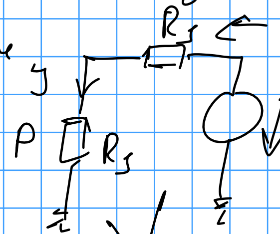
Leistung P



Welle mit Leistungsdichte S

Über welche Fläche sammelt die Antenne die Leistungsdichte auf?

Antenne




$R_S \leftarrow$ Strahlungswiderstand

$U \hat{=}$ Spannung aus der aufgesammelten elektrischen Feldstärke

Leistungsanpassung

$$I = \frac{U}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{R_S} \rightsquigarrow \text{Verfügbare Leistung } P_{verf} = \frac{1}{2} U \cdot I$$

$$P = \frac{\pi}{3} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\right)^{-1} \cdot \frac{I^2 \cdot l^2}{\lambda^2}$$

$$R_S = 80\pi^2 \cdot \frac{l^2}{\lambda^2}$$

$$P = \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}}_{1/Z} \cdot \frac{3}{16} \frac{U^2 \cdot \lambda^2}{\pi\, l^2}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{E^2}{Z} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

$\frac{3}{2}$ ↑ Gewinn ; $\frac{E^2}{Z}$ Leistungsdichte $\frac{\lambda^2}{4\pi}$ Fläche

Ziel ist die Form $P =$ Leistungsdichte $\cdot$ $\underbrace{\text{Effektive Fläche}}_{A_{eff}}$

$$A_{eff} = \underbrace{\frac{3}{2}}_{G} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

$$\boxed{\frac{A_{eff}}{G} = \frac{\lambda^2}{4\pi}}$$

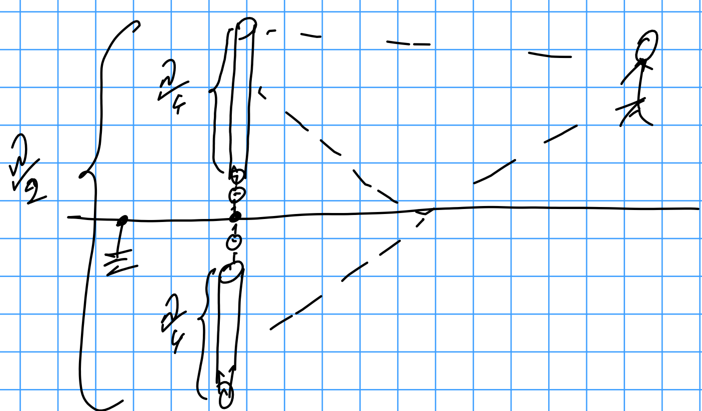
Gilt grundsätzlich und immer bei allen verlustfreien Antennen

Wenn man den Gewinn erhöhen möchte, muss gleichzeitig auch die Fläche steigen, also

$$G \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} = A_{eff}$$

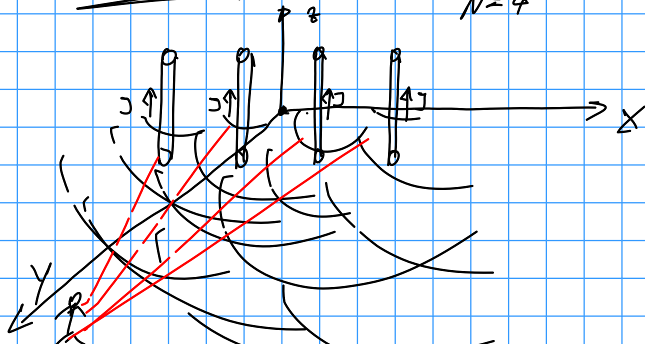
$$\Leftrightarrow \quad \frac{G}{4\pi} = \frac{A_{eff}}{\lambda^2}$$

$\frac{\lambda}{4}$ - Antenne



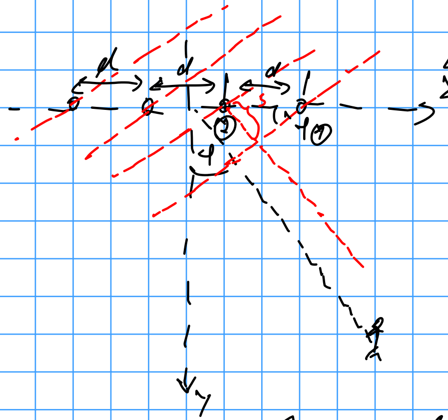

## Antennenfelder

$N = 4$




Jede Antenne ist Ausgangspunkt einer Kugelwelle

auf y-Achse: Entfernung zu allen Antennen ist gleich
⇒ Jede Einzelwelle wird mit der gleichen Phase empfangen ⇒ Konstruktive Überlagerung.




Draufsicht, alle Antennen gleichphasig gespeist

Wellen werden mit einem Phasenunterschied (Gangunterschied) s „empfangen“

$s = d \cdot \sin\varphi$

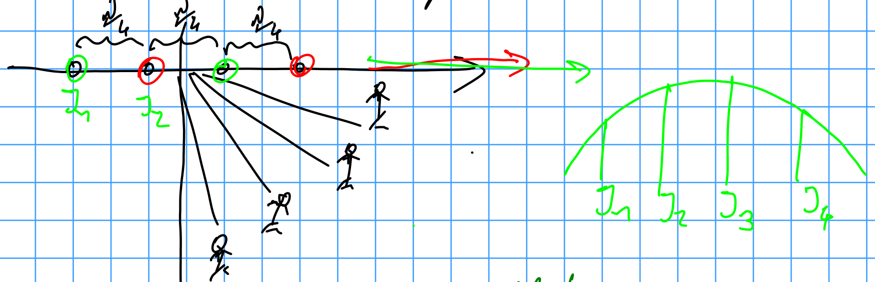
Phasenfaktor der Wellen

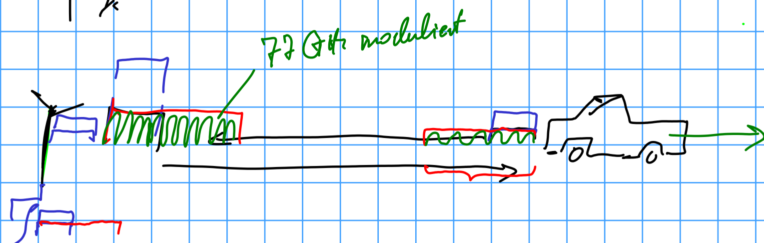
(a) nur als Unterschied von (1) zu (2)

$e^{-jk\cdot d\cdot \sin\varphi} = e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}\cdot d\cdot \sin\varphi}$ mit $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

(b) kann man fortsetzen für weitere Wellenfronten

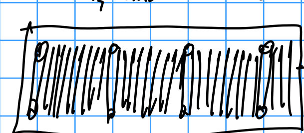
(c) Überlagerung der Wellenfronten führt zu Interferenzmuster




---

Was passiert bei sehr vielen, dicht benachbarten Antennen, und wie baut man so etwas?

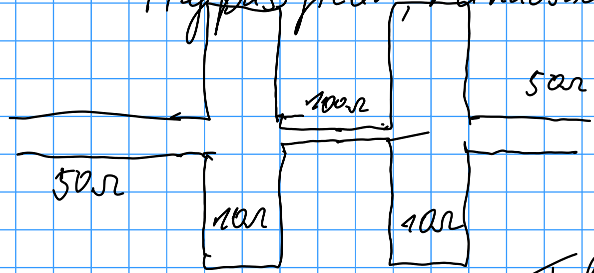


Strahlende Fläche (Öffnung) Apertur

⇒

**Aperturstrahler**

Tiefpassfilter, Mikrostreifenleitung




Tiefpassfilter